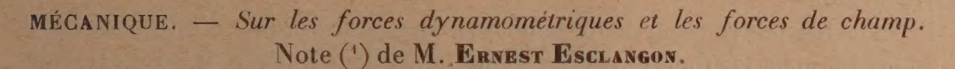
ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 6 MARS 1939.

PRÉSIDENCE DE M. AUGUSTE BÉHAL.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.



MÉCANIQUE. — *Sur les forces dynamométriques et les forces de champ.* Note (¹) de M. **ERNEST ESCLANGON.**

Nous avons montré (²) que, en relativité restreinte, les équations du mouvement d'un point matériel soumis à une force dynamométrique (traction par un fil par exemple) ne sont pas en accord avec celles qu'on déduit du principe de conservation de l'énergie dans un champ de forces, notamment en ce qui concerne l'expression de la masse latérale.

Envisageons un champ de forces étudié dans un système S. En réalité, la caractéristique complète d'un tel champ doit comporter la définition en tout point géométrique M et à une époque t, de l'accélération d'un point matériel soumis à ce champ et animé en M d'une vitesse donnée, c'est-à-dire

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \Phi\left(x, y, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \Psi\left(x, y, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right).$$

Si l'on considère un second système S' en translation uniforme de vitesse v suivant Ox, on peut alors caractériser ce même champ dans S' d'une manière analogue, d'après les formules

$$(2) \qquad \frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{\left(1 + \frac{v}{C}\frac{dx'}{dt'}\right)^3}{\left(1 - \frac{v^2}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{\left(1 + \frac{v}{C}\frac{dx'}{dt'}\right)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1 - \frac{v^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{v}{C}\frac{dy'}{dt'}\frac{d^2x}{dt^2}\right]$$

(¹) Séance du 27 février 1939.

(²) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 62, et *Bull. Astr.*, 10, 1, 1937, p. 48.

dans lesquelles on remplacera d^2x/dt^2, d^2y/dt^2 par leurs expressions (1) dans lesquelles x, y, t, dx/dt, dy/dt sont eux-mêmes remplacés en fonction de x', y', t', dx'/dt', dy'/dt'.

On peut évidemment considérer d'une manière particulière dans les formules (1) les accélérations, définies en chaque point M et à l'instant t, qui correspondent à des vitesses nulles ($dx/dt = dy/dt = 0$), ce qui donnerait les fonctions $\Phi(x, y, t, 0, 0)$, $\Psi(x, y, t, 0, 0)$, mais ces fonctions ne suffisent à caractériser les propriétés du champ [3], que si par des considérations ou des circonstances physiques, mécaniques ou autres, on sait en déduire les fonctions générales Φ et Ψ des formules (1). C'est ce qui pourrait se produire, par exemple, si l'on savait *a priori* et suivant les cas, que dans tel ou tel système S′ en translation par rapport à S, les formules (2) doivent garder une forme identique à (1), c'est-à-dire rester invariantes.

Considérons plus particulièrement les champs *constants*, c'est-à-dire ceux dans lesquels les fonctions Φ et Ψ ne dépendent ni de x, y, ni de t, pour lesquels par conséquent on peut écrire

$$(3)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \Phi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \Psi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right).$$

Le champ est alors constant aussi dans S′.

Résolvons préalablement le problème suivant. A quelles conditions, pour les fonctions Φ et Ψ, les formules (3) sont-elles invariantes vis-à-vis de tous les systèmes S′ en translation uniforme dans une direction donnée? Si cette direction est celle de Ox, nous avons montré [4] que, en posant

$$(4)\qquad u = \frac{dx}{dt}, \qquad \lambda = \frac{\dfrac{dx}{dt}}{\left(1 - \dfrac{u^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \mu = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\left(1 - \dfrac{u^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

les relations (3), supposées invariantes, se mettent nécessairement sous la forme

$$(5)\qquad \frac{d\lambda}{dt} = \varphi(\mu), \qquad \frac{d\mu}{dt} = \left(1 - \frac{u^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \theta(\mu),$$

---

(3) Il serait possible notamment que, vis-à-vis de deux systèmes S et S′ en translation uniforme, les expressions $\Phi(x, y, t, 0, 0)$, $\Psi(x, y, t, 0, 0)$ restent invariantes sans que les expressions analytiques complètes de l'accélération en fonction des vitesses restent elles-mêmes invariantes.

(4) *Bulletin astronomique*, 10, 1, 1937, p. 48.

$\varphi(\mu)$ et $\theta(\mu)$ étant des fonctions arbitraires de μ. L'invariance ne peut avoir lieu pour deux directions distinctes. C'est ainsi que dans le cas d'un point matériel soumis à une traction constante (par l'intermédiaire d'un fil par exemple) parallèle à Oy, on démontre que les équations du mouvement doivent être invariantes par rapport à toutes les translations uniformes parallèles à Ox, ce qui permet de déterminer entièrement les fonctions φ et θ, à savoir $\varphi(\mu)=0$, $\theta(\mu)=k[1-(\mu^2/C)]^{\frac{3}{2}}$.

Soit maintenant un champ constant dans S, parallèle à Ox, c'est-à-dire que, dans les relations (3), on suppose par hypothèse $\Psi(0,0)=0$. Dans S′, en translation, avec la vitesse v suivant Ox, le champ est constant également ainsi qu'il résulte des expressions (2), et l'on peut écrire

$$(6)\qquad \frac{d^2x'}{dt'^2}=\Phi'\left(\frac{dx'}{dt'},\frac{dy'}{dt'}\right),\qquad \frac{d^2y'}{dt'^2}=\Psi'\left(\frac{dx'}{dt'},\frac{dy'}{dt'}\right),$$

avec

$$(7)\qquad \Phi'(0,0)=\frac{\Phi(v,0)}{\left(1-\frac{v^2}{C}\right)^{\frac{3}{2}}},\qquad \Psi'(0,0)=\frac{\Psi(v,0)}{\left(1-\frac{v^2}{C}\right)}.$$

Si les relations (3) sont invariantes, vis-à-vis des translations parallèles à Ox (translatives suivant Ox), on a alors

$$(8)\qquad \Phi'(0,0)=\Phi(0,0)=\varphi(0);\qquad \Psi'(0,0)=\Psi(0,0)=\theta(0),$$

et, si la direction du champ est parallèle à Ox (accélérations parallèles à Ox pour des vitesses nulles), on doit avoir $\theta(0)=0$. Enfin, pour raisons de symétrie de part et d'autre de la direction Ox, on doit avoir

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l}\Phi\left(\frac{dx}{dt},-\frac{dy}{dt}\right)=\Phi\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right),\qquad \Psi\left(\frac{dx}{dt},-\frac{dy}{dt}\right)=-\Psi\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right),\\ \Psi\left(\frac{dx}{dt},0\right)=0,\end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$(10)\qquad \varphi(\mu)=\varphi(-\mu),\qquad \theta(-\mu)=-\theta(\mu).$$

Jusqu'ici il n'a été introduit aucune notion de physique ou de mécanique. La question qui se pose maintenant est de savoir si les équations du mouvement attaché à un champ de forces sont translatives parallèlement à ce champ ([5]). Il est à remarquer que dans l'hypothèse de

([5]) Elles ne peuvent pas être translatives perpendiculairement à ce champ, puisqu'on obtient dans ce cas des équations incompatibles avec le principe de conservation de l'énergie.

propriété translative suivant Ox, l'équation du mouvement d'un point, parallèlement à Ox, $(\mu = 0)$ est, d'après les équations (5),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(1 - \frac{u^2}{C}\right)^{\frac{3}{2}} \varphi(0), \tag{11}$$

c'est-à-dire précisément l'équation classique qu'on déduit du principe de conservation de l'énergie. Si l'application de ce principe est regardée comme légitime, on peut être fondé à penser corrélativement que les équations du mouvement sont translatives parallèlement à Ox, et par nouvelle application du principe de conservation de l'énergie, pour les mouvements perpendiculaires au champ (vitesse initiale $u = 0$), on en tire immédiatement $\varphi(\mu) = k[1 - (\mu^2/c)]^{\frac{1}{2}}$. En résolvant les équations (5) par rapport à d^2x/dt^2 et d^2y/dt^2, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= k\left(1 - \frac{u^2}{C}\right)\left(1 - \frac{V^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \left(1 - \frac{u^2}{C}\right)\theta(\mu) - \frac{k}{C}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\left(1 - \frac{V^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right. \qquad \left[V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right], \tag{12}$$

équations qu'on pourrait, dans le cas général, considérer comme les équations intrinsèques du mouvement, k représentant en un point l'intensité du champ ([6]), dx/dt, dy/dt et d^2x/dt^2, d^2y/dt^2 étant les projections de la vitesse et de l'accélération respectivement sur la direction du champ et la direction perpendiculaire.

Considérons le mouvement observé dans un système S'' en translation uniforme de vitesse v parallèle à Oy. Les accélérations qui correspondent à des *vitesses nulles* dans ce système sont données par

$$\frac{d^2x''}{dt''^2} = \frac{\varphi(v)}{\left(1 - \frac{v^2}{C}\right)}, \qquad \frac{d^2y''}{dt''^2} = \frac{\theta(v)}{\left(1 - \frac{v^2}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{13}$$

Il est probable que la fonction $\theta(\mu)$ doit être prise égale identiquement à zéro, mais en prenant $\varphi(\mu) = k[1 - (\mu^2/C)]^{\frac{1}{2}}$, l'accélération d^2x''/dt''^2 resterait dépendante de v. A quelques précisions près, tenant à l'influence éventuelle du champ sur les temps définis par les horloges et à la définition

---

([6]) C'est-à-dire l'accélération pour les vitesses nulles. Nous faisons abstraction des masses, parce qu'il s'agit ici de l'action sur un point matériel déterminé.

d'une translation uniforme dans un champ, il semble qu'on pourrait en conclure, par exemple, que les lois de la chute des corps changeraient suivant la vitesse uniforme du système de comparaison, et pour préciser une image, ne seraient pas les mêmes dans un ascenseur et dans une voiture de chemin de fer.

SÉROTHÉRAPIE. — *Sur les caractéristiques pathogènes des microbes de la gangrène gazeuse. Principes fondamentaux de la sérothérapie antigangréneuse.* Note de M. **Hyacinthe Vincent**.

Il existe un groupe de microbes anaérobies pathogènes qui présentent un ensemble de particularités biologiques spéciales : ce sont les agents de la gangrène gazeuse. En premier lieu, ils vivent et se perpétuent dans le milieu extérieur et se comportent ainsi comme des saprophytes. En second lieu, séparés de leurs toxines respectives, puis inoculés sous la peau ou dans les muscles, ils ne manifestent que rarement un pouvoir pathogène. Enfin, si l'on traumatise les tissus dans lesquels on va les inoculer, si l'on provoque des ruptures vasculaires, si l'on injecte des substances chimiques nécrosantes (E. Roux, H. Vincent), si l'on refroidit fortement le membre inoculé (H. Vincent) etc., en un mot si l'on transforme les tissus d'inoculation en milieux inertes, ces derniers offrent un terrain propice à la multiplication de ces agents infectieux.

Les conditions adjuvantes précitées sont, à la fois, nécessaires et suffisantes. Sous leur influence, ces anaérobies, qui ont les caractères des saprophytes, deviennent aptes à proliférer *in vivo*, à acquérir des propriétés pathogènes redoutables, enfin à déterminer la mort de l'homme ou des animaux, soit par leur végétation active et intense plus ou moins aidée par leurs toxines ou leur pouvoir protéolytique (*Bacillus perfringens*, vibrion septique, *Bacillus histolyticus*), soit plus spécialement par leurs toxines (*Bacillus œdematiens*).

Ce sont donc des saprophytes éventuellement pathogènes [1].

---

[1] Cette constatation et cette définition s'appliquent à la toxi-infection tétanique (L. Vaillard et H. Vincent). Moins dangereux et surtout moins toxiques, *Bacillus fusiformis* et *Spirochæta vincenti* peuvent cependant donner lieu, en symbiose, non seulement au noma, mais encore à la gangrène ou pourriture d'hôpital (H. Vincent), jadis si meurtrière chez les blessés. J'ai observé la perte complète du pied ou de la jambe chez de tels infectés.

J'ai été conduit, au cours de la guerre de 1914, à étudier une méthode de sérothérapie permettant de combattre avec efficacité les agents déterminants de la gangrène gazeuse. Sa préparation et sa pratique, pour laquelle j'ai eu la collaboration de G. Stodel, ont donné un sérum dont les résultats ont été extrêmement favorables, au double point de vue préventif et curatif.

De nombreux travaux sur la sérothérapie antigangréneuse ont été publiés en France, notamment par Weinberg, et à l'étranger.

J'ai cru devoir refaire de nouvelles expériences en vue de vérifier les notions premières sur lesquelles est fondée la sérothérapie antigangréneuse.

La gangrène gazeuse est, dans environ 80 pour 100 des cas, un syndrome infectieux polymicrobien déterminé par les anaérobies ci-dessus, auxquels il faut joindre le *Bacillus fallax*. Ces anaérobies s'associent deux à deux, trois à trois, très souvent combinés, d'ailleurs, avec divers microbes anaérobies ou aérobies non gangréneux. Le streptocoque est le plus dangereux et le plus fréquent parmi ces derniers. Le *Bacillus Coli* n'est pas exceptionnel.

De ce qui précède, il résulte cette première conclusion que le sérum antigangréneux doit être multivalent, c'est-à-dire actif simultanément contre chacun des anaérobies de la gangrène.

Le second problème fondamental est le suivant. Convient-il de réaliser un sérum qui soit uniquement antitoxique, c'est-à-dire neutralisant les toxines sécrétées par les microbes de la gangrène, ou bien est-il préférable de préparer un sérum mixte, à la fois antimicrobien et antitoxique? *A priori*, la réponse n'est pas douteuse, puisque la sérothéraphie mixte permet de combattre, à la fois, le microbe et ses toxines, en un mot la cause et l'effet du processus gangréneux.

Adoptée autrefois, la sérothérapie antitoxique des gangrènes gazeuses vise exclusivement la neutralisation des toxines sécrétées par les germes de la gangrène. Or ces germes sont répandus en quantités souvent colossales, dans toutes les régions, souvent très vastes, qui sont infectées : on peut les retrouver partout. La sérothérapie antitoxique néglige complètement ces agents de l'infection. Elle est certainement insuffisante dans les gangrènes polymicrobiennes à pronostic fatal, si fréquentes en temps de guerre.

Le caractère toxique du *B. œdematiens* est bien connu, mais celui des autres facteurs gangréneux est beaucoup moindre, et les infections à *B. œdemaciens* sont, aussi, beaucoup moins souvent observées que celles du *B. perfringens*, notamment. D'autre part, on a voulu tenir compte

de la possibilité du titrage des sérums antitoxiques, moins difficile que celui des sérums mixtes. Mais ce titrage soulève lui-même de sérieuses objections [2].

C'est pourquoi j'ai adopté le principe de la sérothérapie antigangréneuse multivalente, à la fois antimicrobienne et antitoxique, qui s'adresse à tous les agents de la gangrène gazeuse. Son efficacité s'est vérifiée non seulement expérimentalement chez le cobaye, mais encore et surtout dans ses applications répétées, au cours de la guerre de 1914, chez les blessés atteints des formes les plus sévères et considérées comme fatales, de la gangrène gazeuse [3]. Dans ces dernières, la proportion des guérisons, chez les malades à pronostic mortel, a atteint 90,13 pour 100; ces guérisons ont été très rapides. Le pouvoir préventif du même sérum a été également très efficace (Clavelin).

Si l'on veut vérifier chez l'animal la valeur d'un sérum antigangréneux, on doit faire état du principe général que j'ai énoncé au début de cette Note, à savoir que la gangrène gazeuse est un complexe morbide polymicrobien, à la fois infectieux et toxique, commandé par des bactéries qui exigent, le plus souvent, pour envahir les tissus vivants, que ces tissus soient dilacérés, écrasés, infiltrés de sang et de suc musculaire, en un mot qu'ils soient comparables à la matière organique morte aux dépens de laquelle ils vivent habituellement dans le milieu extérieur.

Dans ces conditions, ils deviennent capables de se répandre avec une

---

(2) Ce mode de contrôle ne vise, en effet, que l'appréciation de leur pouvoir antitoxique, non de leur pouvoir anti-infectieux qui est, dans la gangrène, plus important encore. Il a, d'ailleurs, donné lieu, à la *Société des Nations*, à des critiques ou à des divergences d'opinion, quant à son application (Weinberg, Sordelli, S. E. Stewart et J. M. Clampit).

C'est, en effet, et avant tout, le pouvoir curatif d'un sérum qui importe. A mon avis, le titrage du sérum antitoxique actif contre un ou deux des agents de la gangrène gazeuse *ne donne pas la mesure complète de son pouvoir curatif ni même préventif contre les infections* proprement dites dues à ces microbes.

Il ne faut pas oublier que la gangrène gazeuse est une toxi-infection, d'ordinaire polymicrobienne, qui sollicite une thérapeutique spécifique également polyvalente, visant en outre et, à la fois, ces microbes et leurs poisons.

(3) H. Vincent, *C. R. de la Société de Biologie*, **65**, 1908, p. 624; Supplément à l'Exposé des *Titres scientifiques*, Paris, 1922, p. 7; H. Vincent et G. Stodel, *Comptes rendus*, **167**, 1918, p. 137, 245, 305; **168**, 1919, p. 188; H. Vincent, *Société de Chirurgie*, **44**, 1918, p. 1317 (exposé du principe de la sérothéraphie antigangréneuse; cas de guérison inespérée).

extrême rapidité dans les tissus privés de vitalité et non défendus par les leucocytes. Dans ce stade infectieux, ils sécrètent, outre leurs toxines, des ferments protéolytiques qui, de proche en proche, digèrent les tissus sains de voisinage. C'est pourquoi on trouve le *B. perfringens* dans le sang, pendant la vie, 9 fois sur 10 blessés gravement infectés et, après la mort, dans le sang, le foie et la rate ([4]).

En conséquence, le contrôle expérimental de l'activité du sérum antigangréneux doit reproduire rigoureusement les conditions de l'infection chez l'homme (et chez les animaux) : inoculation dans les muscles préalablement écrasés du cobaye anesthésié au chloroforme. L'injection de l'antigène aux témoins détermine l'apparition à peu près constante de la gangrène gazeuse ([5]) et la mort fréquente. La comparaison avec les résultats observés chez les animaux préservés par le sérum permet ainsi d'apprécier avec exactitude l'activité de celui-ci.

Dans une série d'expériences ([6]), on a constaté qu'une dose mortelle de $0^{cm^3},25$ de culture de *B. perfringens* virulent, inoculée à 11 cobayes témoins, a déterminé 10 morts et une survie.

La même dose de culture totale du *B. perfringens* a été mélangée à $0^{cm^3},05$, $0^{cm^3},02$ et $0^{cm^3},01$ de sérum antigangréneux mixte et multivalent; le mélange a été porté à 39° pendant une heure, puis inoculé, aux doses respectives susindiquées d'antigène et de sérum, à 22 cobayes dont les muscles fémoraux avaient été soumis à l'écrasement.

Ces inoculations ont donné 19 survies, soit 86,36 pour 100, et 3 morts, soit 13,63 pour 100 ([7]).

Une autre série d'expériences a été faite à la même date et, comparativement, avec un sérum *antitoxique*, d'une part et, d'autre part, avec un sérum mixte, antimicrobien et antitoxique. Le microbe gangréneux d'épreuve a été le *Bacillus perfringens* (mélange de six races).

1° Les cobayes témoins, au nombre de 23, ont présenté 23 cas de gangrène gazeuse (100 pour 100) avec 19 morts (82,60 pour 100) et 4 survies (17,39 pour 100).

2° 27 cobayes ont reçu un mélange du même antigène et de sérum antiperfringens *antitoxique*.

([4]) L'infection gangréneuse n'est, sans doute, pas comparable à celle de la septicémie charbonneuse, par exemple, qui, à ce point de vue, a bien peu d'équivalents. Mais, à coup sûr, elle diffère complètement de la diphtérie et du tétanos qui sont deux toxémies à foyer infectieux strictement localisé et strictement réduit, et qui requièrent, dès lors, une sérothérapie antitoxique.

([5]) H. Vincent et G. Stodel, *loc. cit.*

([6]) Ces expériences et les suivantes ont été effectuées en 1924.

([7]) Chez certains cobayes, la dose minima de sérum antimicrobien et antitoxique ($0^{cm^3},01$) s'est montrée plus efficace que la dose de $0^{cm^3},05$.

Ces animaux, préparés comme il a été dit, ont donné 19 cas de gangrène gazeuse, soit une proportion de 70,37 pour 100 inoculés, dont 4, c'est-à-dire 14,81 pour 100 ont été suivis de mort.

La proportion des survies a été de 85,18 pour 100.

3° 28 cobayes ont été inoculés avec le mélange du même antigène avec le sérum mixte, *antimicrobien et antitoxique;* 9 d'entre eux ont offert une forme moyenne ou légère (tumeur simple) de gangrène. Il y a eu une mort tardive, au 19e jour (3,57 pour 100). Le nombre des survivants a été de 27 (96,42 pour 100).

Ces expériences démontrent la supériorité très marquée du sérum mixte, antimicrobien et antitoxique. Son emploi comporte une proportion beaucoup plus réduite des cas de gangrène, une bénignité considérablement plus grande et une mortalité quatre fois moindre, dans des conditions sévères d'infection expérimentale.

D'autres expériences ont fourni des résultats analogues : ces derniers sont entièrement en accord avec les succès obtenus, par l'emploi de cette méthode, chez l'homme.

M. **Emile Borel** s'exprime en ces termes :

J'ai l'honneur de faire hommage à l'Académie du dernier fascicule (fasc. V) du Tome II de mon *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications*. Ce fascicule, consacré à la *Mécanique statistique quantique*, est dû à M. Francis Perrin, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, qui avait bien voulu le rédiger d'après mon cours.

Cet ouvrage expose le développement de la mécanique statistique en relation avec celui de la mécanique quantique.

La première partie est un résumé de la mécanique aléatoire classique, montrant la nécessité générale, dans cette théorie, de l'équipartition de l'énergie cinétique, conséquence directe du principe ergodique. La preuve expérimentale de la fausseté, dans certains cas, de ce théorème d'équipartition est, comme on sait, à l'origine des quanta.

La seconde partie est relative à la transformation de la mécanique statistique par l'idée de quanta, qui ramène les évaluations de probabilité à des dénombrements d'états distincts.

Enfin, la troisième partie expose l'évolution autonome de la statistique quantique fondée sur ces dénombrements d'états après l'abandon de la notion d'individualité des particules de même espèce, abandon nécessaire pour édifier une théorie corpusculaire de la lumière. L'exposé de la

thermodynamique statistique, et notamment des raisonnements relatifs aux équilibres chimiques et au principe de Nernst, se trouve très simplifié par l'abandon complet de toute discernabilité des particules. Le dernier chapitre expose comment cet abandon, ainsi suggéré par la mécanique statistique, a pu être exprimé en mécanique ondulatoire par un postulat simple relatif au caractère de symétrie des fonctions d'onde, et indique la vérification éclatante de ce postulat par la découverte de l'ortho et du parahydrogène.

Avec ce fascicule, le *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications* est maintenant terminé.

ÉLECTIONS.

L'Académie procède par la voie du scrutin à l'élection d'un Membre de la Section d'Astronomie en remplacement de M. *Aymar de La Baume Pluvinel* décédé.

Le nombre de votants étant 55, puis 56, le scrutin donne les résultats suivants :

	Nombre de suffrages.	
	1er tour.	2e tour.
M. Bernard Lyot	23	30
M. Jules Baillaud	22	24
M. Armand Lambert	4	2
Bulletins blancs	1	
» nuls	5	

M. **Bernard Lyot**, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Son élection sera soumise à l'approbation de M. le Président de la République.

PRÉSENTATIONS.

Dans la formation d'une liste de candidats au poste de Chimiste en chef à l'Administration des *Monnaies et Médailles*, pour la première ligne M. *François Raoult* réunit l'unanimité de 44 suffrages.

Pour la seconde ligne M. *Pierre Fauconnier* réunit l'unanimité de 36 suffrages.

En conséquence la liste présentée à M. le Ministre de l'Éducation Nationale comprendra :

En première ligne............ M. **François Raoult**.
En seconde ligne............ M. **Pierre Fauconnier**.

COMMISSIONS.

Le scrutin pour la nomination des Commissions de prix de 1939 est clos en la séance du 6 mars.

53 cahiers de vote ont été déposés.

Le dépouillement du scrutin donne les résultats suivants :

I. Mathématiques : *Prix Francœur*. — MM. É. Picard, L. Lecornu, J. Hadamard, É. Borel, H. Lebesgue, É. Cartan, H. Villat, G. Julia, P. Montel.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J. Drach, É. Jouguet.

II. Mécanique : *Prix Montyon*, *Poncelet*, *Boileau*. — MM. É. Picard, L. Lecornu, É. Borel, J. Drach, É. Jouguet, A. de Gramont, H. Villat, L. de Broglie, A. Caquot.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J. Hadamard, P. Montel.

III. Astronomie : *Prix Lalande*, *Valz*, *G. de Pontécoulant*. — MM. É. Picard, H. Deslandres, H. Lebesgue, A. Cotton, E. Esclangon, C. Maurain, G. Fayet, J. Chazy, B. Lyot.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. E. Fichot, C. Fabry.

IV. Géographie : *Prix Gay, fondation Tchihatchef*, *prix Binoux*, *Alexandre Givry*. — MM. A. Lacroix, R. Bourgeois, E. Fichot, G. Perrier, C. Maurain, L. Lapicque, J. Tilho, G. Durand-Viel, E.-G. Barrillon.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. M. Molliard, A. Chevalier.

V. Navigation : *Prix Plumey*. — MM. É. Picard, L. Lecornu, R. Bourgeois, M. Laubeuf, É. Borel, E. Fichot, G. Perrier, J. Drach,

É. Jouguet, H. Villat, J. Tilho, L. de Broglie, A. Caquot, G. Durand-Viel, E.-G. Barrillon.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. C. Fabry, P. Langevin.

VI. Physique : *Prix Gaston Planté, François Hébert, Henri de Parville, Hughes, Pierson-Perrin, Paul Marguerite de La Charlonie, fondations Clément Félix, Pierre Lafitte, général Ferrié.* — MM. É. Picard, É. Branly, M. Brillouin, J. Perrin, A. Cotton, M. de Broglie, C. Fabry, A. de Gramont, P. Langevin.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. A. Lacroix, L. de Broglie.

VII. Chimie : *Prix Montyon des arts insalubres, Jecker, fondation Cahours, prix Houzeau, fondation Charles-Adam Girard.* — MM. A. Lacroix, A. Béhal, G. Bertrand, A. Desgrez, M. Delépine, R. Fosse, R. Lespieau, P. Lebeau, N....

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. C. Fabry, M. Javillier.

VIII. Minéralogie et Géologie : *Prix Cuvier, Delesse, Victor Raulin, Joseph Labbé, André-C. Bonnet.* — MM. A. Lacroix, C. Barrois, P. Sabatier, A. Cotton, L. Cayeux, C. Jacob, C. Mauguin, F. Grandjean, E. de Margerie.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J. Perrin, J. Tilho.

IX. Botanique : *Prix Desmazières, Montagne, Jean Thore, de Coincy, Jean de Rufz de Lavison.* — MM. L. Bouvier, A. Lacroix, P.-A. Dangeard, G. Bertrand, M. Molliard, L. Blaringhem, A. Guilliermond, A. Chevalier, H. Colin.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. A. Gosset, C. Pérez.

X. Économie rurale : *Prix Nicolas Zvorikine.* — MM. P. Marchal, E. Leclainche, G. Bertrand, L. Blaringhem, L. Lapicque, R. Fosse, É. Schribaux, G. Moussu, M. Javillier.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. M. Molliard, C. Pérez.

XI. Anatomie et Zoologie : *Prix Da Gama Machado, fondation Savigny.* — MM. A. d'Arsonval, L. Bouvier, A. Lacroix, P. Marchal, H. Vincent, M. Caullery, C. Pérez, É. Roubaud, P. Wintrebert.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. L. Cuénot, A. Guilliermond.

XII. Anthropologie : *Prix André-C. Bonnet.* — MM. H. Vincent, M. Caullery, L. Blaringhem, L. Lapicque, A. Gosset, J.-L. Faure, C. Pérez.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. C. Achard, P. Wintrebert.

XIII. MÉDECINE ET CHIRURGIE : *Prix Montyon, Barbier, Bréant, Godard, Chaussier, Mège, Bellion, Larrey, Argut, fonds Charles Bouchard, prix Jean Dagnan-Bouveret.* — MM. A. d'Arsonval, A. Lacroix, É. Branly, E. Leclainche, H. Vincent, C. Achard, L. Lapicque, A. Gosset, J.-L. Faure, C. Pérez, P. Portier.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. M. Javillier, E. Sergent.

XIV. CANCER ET TUBERCULOSE : *Fondation Roy-Vaucouloux, prix Louise Darracq, Eugène et Amélie Dupuis, fondation Henriette Regnier.* — MM. H. Vincent, M. Caullery, C. Achard, L. Lapicque, A. Gosset, J.-L. Faure, E. Sergent.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. E. Leclainche, P. Wintrebert.

XV. PHYSIOLOGIE : *Prix Montyon, Pourat, Philipeaux, Fanny Emden.* — MM. A. d'Arsonval, H. Vincent, M. Molliard, M. Caullery, L. Lapicque, C. Pérez, P. Portier.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. A. Guilliermond, P. Wintrebert.

XVI. STATISTIQUE : *Prix Montyon.* — MM. É. Picard, L. Lecornu, É. Borel, H. Lebesgue, E. Fichot, J. Drach, C. Maurain.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. L. Blaringhem, É. Cartan.

XVII. HISTOIRE ET PHILOSOPHIE DES SCIENCES : *Prix Binoux.* — MM. É. Picard, L. Bouvier, É. Borel, M. Caullery, H. Villat, L. de Broglie, C. Pérez.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. G. Bertrand, M. Javillier.

XVIII. OUVRAGES DE SCIENCES : *Prix Henri de Parville.* — MM. A. Béhal, G. Perrier; É. Picard, A. Lacroix, et trois membres élus : MM. É. Borel, M. Caullery, M. de Broglie.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. C. Fabry, P.-A. Dangeard, L. Martin.

XIX. *Médailles Arago, Lavoisier, Berthelot, Henri Poincaré.* — MM. A. Béhal, G. Perrier; É. Picard, A. Lacroix.

XX. *Prix Gustave Roux, Thorlet, fondations Trémont, Gegner, Hirn, Henri Becquerel, Mme Victor Noury, Charles Frémont, Giffard, Lannelongue, Gibou, Alexandre Darracq, Girbal-Baral, Leroy-Drouault, Octave Mirbeau.* — MM. A. Béhal, G. Perrier; É. Picard, A. Lacroix; R. Bourgeois, L. Bouvier.

XXI. *Prix fondé par l'État* (Grand prix des Sciences physiques). — MM. A. d'Arsonval, A. Lacroix, C. Barrois, P.-A. Dangeard, M. Caullery, L. Blaringhem, C. Pérez.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. R. Fosse, A. Guilliermond.

XXII. *Prix Bordin* (Sciences mathématiques). — MM. É. Picard, L. Lecornu, J. Hadamard, É. Borel, H. Lebesgue, É. Cartan, H. Villat.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages: MM. J. Drach, P. Montel.

XXIII. *Prix Lallemand.* — MM. A. d'Arsonval, L. Bouvier, P. Marchal, H. Vincent, M. Caullery, L. Lapicque, A. Gosset.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. C. Pérez, P. Wintrebert.

XXIV. *Prix Maujean.* — MM. A. d'Arsonval, A. Lacroix, H. Vincent, M. Caullery, C. Pérez, É. Roubaud, P. Wintrebert.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. P.-A. Dangeard, E. Sergent.

XXV. *Prix Petit d'Ormoy* (Sciences mathématiques pures ou appliquées). — MM. É. Picard, L. Lecornu, J. Hadamard, É. Borel, H. Lebesgue, E. Fichot, E. Cartan.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J. Drach, P. Montel.

XXVI. *Prix Petit d'Ormoy* (Sciences naturelles). — MM. L. Bouvier, A. Lacroix, P.-A. Dangeard, M. Molliard, M. Caullery, L. Lapicque, C. Pérez.

On obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. P. Marchal, P. Wintrebert.

XXVII. *Prix Le Conte.* — MM. A. Béhal, G. Perrier, É. Picard, A. Lacroix, et sept membres qui seront élus ultérieurement.

XXVIII. *Prix Jean-Jacques Berger.* — MM. É. Picard, A. d'Arsonval, A. Lacroix, J.-L. Breton, M. Caullery, C. Maurain, C. Pérez.

Ont obtenu ensuite le plus suffrages : MM. H. Vincent, E. Sergent.

XXIX. *Prix Parkin.* — MM. A. Lacroix, H. Vincent, L. Cayeux, C. Achard, C. Maurain, C. Jacob, E. de Margerie.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. A. Gosset, P. Portier.

XXX. *Prix Saintour* (Sciences mathématiques). — MM. É. Picard, É. Borel, H. Lebesgue, A. Cotton, C. Fabry, C. Maurain, É. Cartan.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. H. Villat, L. de Broglie.

XXXI. *Prix Lonchampt.* — MM. A. d'Arsonval, A. Lacroix, E. Leclainche, G. Bertrand, M. Delépine, G. Moussu, M. Javillier.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. P.-A. Dangeard, M. Caullery.

XXXII. *Prix Henry Wilde.* — MM. É. Picard, H. Deslandres, A. Lacroix, É. Borel, G. Bertrand, J. Perrin, E. Esclangon.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. C. Fabry, C. Jacob.

XXXIII. *Prix Charles Dupin.* — MM. É. Picard, É. Borel, H. Lebesgue, E. Fichot, É. Jouguet, É. Cartan, H. Villat.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. G. Durand-Viel, P. Montel.

XXXIV. *Prix Marquet* (Sciences physiques). — MM. A. Lacroix, P.-A. Dangeard, G. Bertrand, M. Caullery, R. Fosse, C. Jacob, C. Pérez.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. L.-E. Bouvier, M. Molliard.

XXXV. *Prix Général Muteau* (Sciences physiques). — MM. A. Lacroix, R. Bourgeois, H. Vincent, C. Fabry, M. Delépine, A. Caquot, G. Durand-Viel.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. É. Picard, G. Bertrand.

XXXVI. *Prix Alexandre Darracq.* — MM. É. Picard, G. Claude, M. Delépine, É. Jouguet, A. Caquot, G. Durand-Viel, R. Esnault-Pelterie,

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. H. Villat, E.-G. Barrillon.

XXXVII. *Fondation Aimé Berthé* (Sciences mathématiques). — MM. É. Picard, É. Borel, A. Cotton, C. Fabry, C. Maurain, H. Villat, P. Montel.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. É. Cartan, L. de Broglie.

XXXVIII. *Fondation Le Chatelier.* — MM. É. Picard, A. Lacroix; G. Charpy, L. Lumière, M. Laubeuf, G. Claude, L. Guillet, R. Esnault-Pelterie.

XXXIX. *Fondation Millet-Ronssin.* — MM. A. Lacroix; L. Cayeux, C. Jacob; P.-A. Dangeard, A. Guilliermond; P. Marchal, C. Pérez.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. C. Barrois; M. Molliard; L.-E. Bouvier.

XL. Recherches scientifiques : *Fondations Villemot, Carrière.* — MM. A. Béhal, G. Perrier; É. Picard, A. Lacroix, et douze membres qui seront élus ultérieurement.

XLI. *Prix Hélène Helbronner-Fould.* — MM. A. Béhal, G. Perrier; É. Picard, A. Lacroix; J.-L. Breton, M. de Broglie, A. Desgrez, A. de Gramont, L. Martin, C. Gutton, N..., N..., N..., N....

CORRESPONDANCE.

M. le **Recteur de l'Université de Grenoble** invite l'Académie à se faire représenter aux cérémonies qui se dérouleront du 13 au 15 mai 1939 pour célébrer le *Sixième centenaire* de la fondation de cette Université.

Le **Comité d'Organisation du Septième Congrès international de Génétique** invite l'Académie à se faire représenter à cette réunion, qui se tiendra à Edimbourg du 23 au 30 août 1939.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Charles Cabanes. *L'état de l'industrie du papier en France à la veille de la Révolution (d'après un manuscrit inédit d'Étienne de Mongolfier).*

GÉOMÉTRIE. — *Remarques sur la génération des parallélépipèdes à n dimensions.* Note (¹) de M. **Carl Benedicks**.

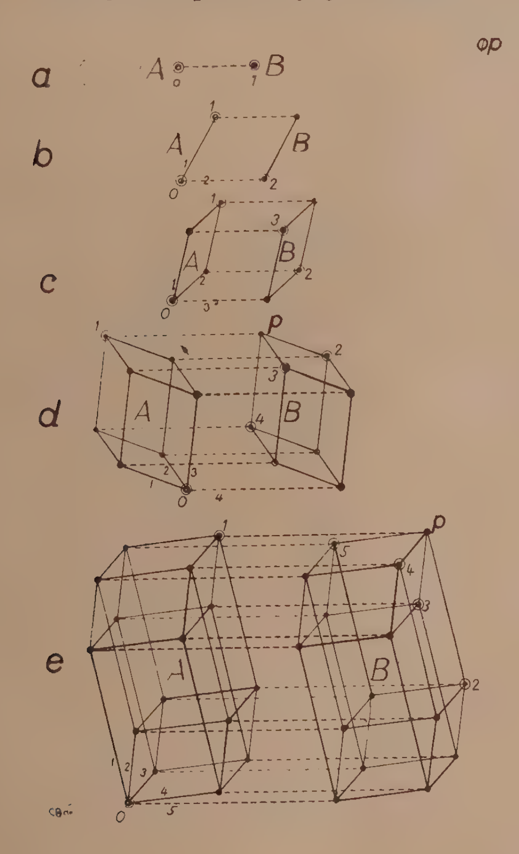
1. Nous avons décrit un diagramme permettant la représentation graphique des compositions multaires, comme celles des alliages (²). Ce diagramme, mettant à profit des extensions dans plusieurs (jusqu'à 9) directions (ou axes) différentes, pourra être considéré comme ayant le même nombre de *dimensions*, tandis que nous sommes accoutumés de dire que le plan *n'a que deux dimensions*. Cette contradiction apparente a donné lieu aux considérations suivantes.

(¹) Séance du 23 janvier 1939.

(²) *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 1398.

2. Acceptons préalablement la définition géométrique élémentaire suivante, qui est en accord avec l'usage ordinaire et technique : *dimension signifie une extension dans une direction déterminée*. Ainsi *nombre de dimensions* est équivalent à *nombre de coordonnées* d'un point.

Par conséquent, rien n'empêche d'employer dans un plan un nombre n de dimensions aussi grand qu'on le juge désirable. Introduisons donc



dans un plan donné un nombre $n > 2$ d'axes de coordonnées fixes; soit marqué dans le plan un point fixe p (différent de l'origine). On demande d'indiquer une suite des n coordonnées de p.

Évidemment, ceci est *impossible sans des informations supplémentaires*, telles que l'indication préalable d'une *suite des n coordonnées* du point (ou

du moins de $n-2$ coordonnées). Une telle suite étant donnée, rien n'empêche d'indiquer les autres (le nombre total est $n!$).

Si, au contraire, nous n'avons introduit dans le plan que $n=2$ axes, il est évident qu'on peut indiquer les (2) coordonnées du point *sans information supplémentaire*. On pourra donc dire que ces $n=2$ axes du plan ont une *validité absolue*, sans réserve, tandis que des axes en surplus demandent des informations spéciales. C'est bien ceci qu'on entend en disant que le plan *a* deux dimensions. Il paraît recommandable de faire la distinction entre (disons) *dimensions absolues*, dont le plan *a* deux, et *dimensions conditionnelles*, dont le nombre est arbitraire.

De même, on pourra dire que *l'espace a trois dimensions absolues*, mais on pourra y introduire autant de dimensions que l'on juge à propos, à condition de donner des informations spéciales.

3. En traçant dans un continu, où l'on a introduit n axes de coordonnées obliques indépendants, toutes les $n!$ suites de coordonnées d'un point p, on y limite un *parallélépipède à n dimensions* P_n. Ainsi, 4 axes ayant été introduits (voir *fig. d*), et un point p ayant été défini au moyen d'*une* suite de 4 coordonnées : en traçant toutes les autres suites de coordonnées, au nombre total de $4!=24$, on y limite un parallélépipède à 4 dimensions P_4.

4. Il est plus commode cependant de *générer un* P_n *en augmentant par* 1 *le nombre de dimensions d'un* P_{n-1}, que nous désignerons comme *objet* A :

L'objet A se trouve dans une position fixe donnée. *Un objet* B, *identique à* A, *subit une translation parallèle* de la position A, par une certaine longueur mesurée *le long d'un axe* (différent des $n-1$ axes antérieurs) *jusqu'à une nouvelle position. On relie chaque point angulaire de* A *au point correspondant de* B. *Le résultat est un* P_n.

5. En appliquant ce procédé successivement à des $n-1$ croissants, de 0 jusqu'à $n-1=4$, on obtient les P_n tracés dans les figures *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, où *d* représente un P_4, *e* un P_5. A titre d'exemple, considérons la figure *d*. L'objet A y indiqué est un parallélépipède ordinaire P_3 (obtenu par ce procédé de translation, comme l'indique AB, *fig. c*). L'objet identique B a subi une translation (le long d'un axe 4) de la position A à la position indiquée. Les huit points angulaires de A ayant été reliés aux points correspondants de B, le résultat, AB, est un P_4.

Ce P_4, dans la figure *e*, forme l'objet A; la translation parallèle de l'objet identique B a été faite le long d'un axe 5.

6. Cette méthode (4) paraît peu connue. Ainsi un géomètre dis-

tingué (³) décrit la génération d'un P_3 sensiblement de la manière suivante : un P_2 (un carré unité) subit une translation (de longueur 1) le long d'un axe (perpendiculaire au P_2); on affirme que le P_2 engendre alors un P_3 (un cube). Mais, comment le P_2, qui joue ici le rôle de notre objet B, pourrait-il alors continuer à marquer la position initiale ? A moins de prêter à l'espace une mémoire, un *objet A est indispensable.*

Ce manque de précision conduit à des obscurités lorsqu'il s'agit de la génération d'un P_4, tandis que la méthode employée ici donne facilement des polytopes P_4, P_5, P_6 rectangulaires.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'approximation des fonctions satisfaisant à une équation linéaire aux dérivées partielles.* Note de M. **Stefan Bergmann**, présentée par M. Paul Montel.

Chaque fonction $H(z, \bar{z})$ satisfaisant à l'équation

$$\Delta H = 4 H_{z\bar{z}} = 0$$

$$\left[z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy.\ H_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial x} - i\frac{\partial H}{\partial y}\right),\ H_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial x} + i\frac{\partial H}{\partial y}\right)\right]$$

dans un domaine simplement connexe, peut être approchée par des polynomes harmoniques. Nous indiquerons ici une généralisation de ce théorème avec quelques applications.

I. Nous désignons dans la suite par $U(z, \bar{z})$ une fonction vérifiant dans un domaine $\mathfrak{F}^2$, dont la courbe frontière est

$$\mathfrak{f}^1 = \mathsf{E}[R = R(\varphi)] \ (^1), \qquad Re^{i\varphi} = x + iy,$$

$R''(\varphi)$ continu, l'équation

$$L(U) \equiv U_{z\bar{z}} + \mathbf{Re}[A(z, \bar{z})U_z] + C(z, \bar{z})U = 0, \quad \mathbf{Re}\ldots = \text{partie réelle de}\ldots;$$

A, C étant des fonctions régulières de z, $\bar{z}$ dans un domaine suffisamment grand, C étant réel.

Comme on sait, pour chaque équation L, il existe une fonction généra-

(³) H. de Vries, *Die vierte Dimension*, Leipzig und Berlin, 1926, p. 71.

(¹) $\mathsf{E}[\ldots]$ désigne l'ensemble des points satisfaisant à la propriété exprimée dans les crochets.

trice de la première espèce $E(z, \bar{z}, t)$, telle que

$$\mathbf{P}[f(p)] = \mathbf{Re}\left[\int_{-1}^{+1} E(z, \bar{z}, t) f(p)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt\right]$$

soit une solution particulière de L et telle que chaque solution de L puisse être représentée sous cette forme où $f(p)$ est une fonction arbitraire d'une variable complexe $p = \frac{1}{2} z(1-t^2)$ régulière dans $\mathfrak{F}^2$ (²). Les fonctions

$$w_{2n-1}(z, \bar{z}) = \mathbf{P}(p^n) \quad \text{et} \quad w_{2n}(z, \bar{z}) = \mathbf{P}(ip^n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

forment un système des solutions particulières de L.

Théorème 1. — *Soit* $U(z, \bar{z})$ *une fonction régulière dans* $\bar{\mathfrak{F}}^2 = \mathfrak{F}^2 + \mathfrak{f}^1$. *Pour chaque* ε *il existe un* $W_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)} w_\nu$ *tel qu'on ait* $|U - W_n| \leqq \varepsilon$, $\{z\} \subset \bar{\mathfrak{F}}^2$.

Théorème 2. — *Soit* $\mathfrak{F}^2$ *un domaine envisagé plus haut et tel que chaque solution de* L *s'annulant sur* $\mathfrak{f}^1$, *soit identiquement nulle. Soit* U *une solution de* L, *prenant sur* $\mathfrak{f}^1$ *les valeurs* $\Phi(s)$, $\Phi''(s)$ *étant continue*, s *désignant la longueur de l'arc sur* $\mathfrak{f}^1$. *Pour chaque* ε *il existe un* W_n *tel que* $|U - W_n| \leqq \varepsilon$, $\{z\} \subset \bar{\mathfrak{F}}^2$.

Théorème 3. — *Supposons que* U *satisfasse aux hypothèses du théorème* 2. *Pour chaque* n, $n = 1, 2, \ldots$, *déterminons les* $a_\nu^{(n)}$ *de telle manière que* $\max_{\{z\} \subset \mathfrak{f}^1} |U - W_n|$ *soit minimum; on a*

$$U = \lim_{n \to \infty} W_n, \qquad \{z\} \subset \bar{\mathfrak{F}}^2.$$

II. Considérons le cas des équations $L(S) + \lambda E(z, \bar{z}) S = 0$, où $E(z, \bar{z})$ est une fonction positive et régulière dans un domaine assez grand. Examinons le problème de trouver les valeurs caractéristiques $\lambda = \lambda_m$, $m = 1, 2, \ldots$ et les fonctions fondamentales correspondantes $S_m(z, \bar{z})$, $S_m \not\equiv 0$, s'annulant sur $\mathfrak{f}^1$. Les $w_n = w_n(z, \bar{z}, \lambda)$ dépendent maintenant de λ.

Théorème 4. — *Si nous déterminons les* $a_\nu^{(n)}$ *et* $\tau^{(n)}$ *de telle manière que*

$$\max_{\{z\} \subset \mathfrak{f}^1} |V_n|, \qquad V_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)} w_\nu(z, \bar{z}, \tau^{(n)}),$$

sous la condition

$$\mathbf{N}(V_n) = \iint_{\mathfrak{F}^2} E(z, \bar{z})\, V_n^2(z, \bar{z})\, dx\, dy = 1,$$

(²) Voir *Recueil Mathématique*, **2** (44), 1937, p. 1169-1198.

soit minimum, et si nous choisissons les $\tau^{(n)}$ *d'un intervalle contenant une valeur unique caractéristique* λ_m, *nous avons* $\lim\limits_{n\to\infty}\tau^{(n)}=\lambda_m$.

Pour démontrer ce théorème, on considère la grandeur

$$M(\rho)=\lim_{n\to\infty} M_n(\rho),$$

$M_n(\rho)$ étant le minimum de $\max\limits_{\{z\}\subset\Gamma^1}|V_n|$ sous la condition $\mathbf{N}(V_n)=1$, mais avec $\tau^{(n)}=\rho$ *fixe*. $M(\rho)$ possède la propriété suivante : Pour les valeurs ρ différentes des valeurs caractéristiques λ_m, $m=1, 2, \ldots$, nous avons $M(\rho)>0$ tandis que $\lim\limits_{\rho\to\lambda_m} M(\rho)=0$.

Théorème 5. — *Sous les hypothèses du théorème* 4, *si* $A(z,\bar{z})\equiv 0$ *et si à* λ_m *correspond seulement une fonction fondamentale* S_m, $\mathbf{N}(S_m)=1$, *nous avons*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)}\, w_\nu(z,\bar{z},\tau^{(n)})=S_m(z,\bar{z}),\qquad \{z\}\subset\overline{\mathcal{F}}^2.$$

Remarquons que, sous des hypothèses supplémentaires, nous pouvons remplacer respectivement

$$\max_{\{z\}\subset\Gamma^1}|U-W_n|\qquad\text{et}\qquad\max_{\{z\}\subset\Gamma^1}|V_n|$$

par

$$\int_{\Gamma^1}|U-W_n|^2\,ds\qquad\text{et}\qquad\int_{\Gamma^1}|V_n|^2\,ds\quad(^3).$$

Une méthode analogue peut être appliquée dans le problème de Cauchy pour le cas des équations de type hyperbolique.

CALCUL DES VARIATIONS. — *Sur une classification des extrémales.* Note de M. **Frédéric Roger**, présentée par M. Émile Borel.

En un point stationnaire d'une fonction réelle de plusieurs variables où la différentielle seconde est une forme quadratique non dégénérée, les variétés régulières sur lesquelles la fonction présente un minimum ont une dimension qui ne peut dépasser le nombre de carrés positifs dans la décomposition en carrés de la différentielle seconde. Semblablement, et c'est le but de cette Note, *étant donné un* arc d'extrémale *pouvant ne satis-*

(3) Voir *Applied Mathematics and Mechanic*, 3, 1936, p. 97-107.

faire ni à la condition de Legendre, ni à celle de Jacobi, mais seulement à la condition de régularité, les familles de courbes variées dans lesquelles cet arc correspond à un minimum de l'intégrale sont caractérisées par deux invariants, *l'un en relation avec la forme quadratique de Legendre, l'autre avec les foyers de Jacobi.*

D'une manière précise, soit un problème de calcul des variations conduisant à une intégrale de la forme

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y^1, y^2, \ldots, y^n, p^1, p^2, \ldots, p^n)\, dx$$

où la fonction donnée f porte sur les n fonctions indéterminées $y^i(x)$ (les $p^i(x)$ étant leurs dérivées) dont les valeurs aux limites $y^i(x_1)$, $y^i(x_2)$ sont assujetties à des conditions données. Relativement à ce problème, soit Γ un arc d'extrémale satisfaisant aux conditions de transversalité aux limites, d'équations $y^i = \bar{y}^i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ où les fonctions $\bar{y}^i(x)$ admettent des dérivées premières continues $\bar{p}^i(x)$ et n'annulent pas le déterminant $\| f''_{p^i p^j} [x, \bar{y}(x), \bar{p}(x)] \|$ entre les abscisses extrêmes x_1 et x_2. Au moyen de r relations différentielles $\varphi_\alpha(x, y^1, y^2, \ldots, y^n, p^1, p^2, \ldots, p^n) = 0$ (quand x varie de x_1 à x_2) $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$ et de c conditions numériques

$$\psi_\beta[a_1, \ldots, a_k, y^1(a_1), \ldots, y^1(a_k), \ldots, y^n(a_1), \ldots, y^n(a_k)] = 0$$

(pour des valeurs a_k comprises entre x_1 et x_2) $(\beta = 1, 2, \ldots, c)$, satisfaites en particulier pour les fonctions $\bar{y}^i(x)$ et régulières dans leur voisinage [1], nous définissons, dans la famille de toutes les courbes variées admissibles, une sous-famille contenant Γ. De ces dernières, nous ne retenons que celles dans lesquelles Γ correspond à un minimum de l'intégrale I [2]. Considérons alors parmi toutes les définitions possibles de ces familles, celles qui font intervenir le plus petit nombre r, puis, parmi ces dernières, le plus petit nombre c.

Définition. — *Nous désignerons par indice de Legendre et indice de Jacobi de l'extrémale* Γ *respectivement ce plus petit nombre de relations différentielles, puis de conditions numériques auxquelles il faut astreindre les courbes variées*

---

(1) C'est-à-dire pour les premières, dont les équations aux variations à partir de Γ soient linéaires, et pour les secondes, dont les différentielles aux points intéressés de Γ soient du premier ordre.

(2) Ne serait-ce que la famille réduite à Γ, la seule dans le cas où I présente un maximum sur Γ.

voisines de Γ *pour que, dans la famille ainsi restreinte, l'intégrale* I *acquiert sur* Γ *un minimum strict relatif faible* (³).

Dans la classification des extrémales qui en résulte, l'indice de Legendre doit être considéré comme *d'ordre plus élevé* que celui de Jacobi, tout comme dans la classification des nombres de deux chiffres, le chiffre des dizaines est d'ordre plus élevé que celui des unités.

Théorème I. — *L'indice de Legendre d'une extrémale* Γ *est égal au nombre de carrés négatifs dans la décomposition en carrés de la forme quadratique de Legendre (dont les coefficients sont les dérivées* $f''_{p^ip^j}[x, \bar{y}(x), \bar{p}(x)]$.

Théorème II. — *Quand l'une au moins des extrémités des courbes variées doit rester fixe, l'indice de Jacobi d'une extrémale* Γ *est au plus égal au nombre de foyers, situés sur* Γ, *du lieu de l'autre extrémité. En sorte que, dans le cas général, l'indice de Jacobi de* Γ *est au plus égal à ce nombre augmenté de n.*

Théorème III. — *Quand l'indice de Legendre d'une extrémale* Γ *est nul (auquel cas* Γ *vérifie la condition de Legendre), son indice de Jacobi coïncide avec l'indice défini par M. Marston Morse comme étant égal au nombre de racines caractéristiques négatives d'un problème convenablement associé à l'extrémale* Γ (⁴).

La démonstration de ces théorèmes repose sur la transformation, selon Legendre, Jacobi et Clebsch, de la variation seconde de l'intégrale I (⁵). Supposant fixes, pour simplifier, les extrémités des courbes variées (⁶)

$$\delta^2 I = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \left[(\varpi^i - a_{ik}\eta^k)(\varpi^j - a_{jl}\eta^l) f''_{p^ip^j} + \frac{d}{dx}(b_{ij}\eta^i\eta^j) \right] dx$$

où $\eta^i(x) = \delta y^i$, $\varpi^i(x) = \delta p^i$, les fonctions $a_{ik}(x)$, $b_{ik}(x)$ étant définies au moyen d'un système de n solutions deux à deux associées $\eta^i_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ des équations de Jacobi par les relations

$$\varpi^l_j - a_{lk}\eta^k_j = 0, \qquad (\varpi^l_j f''_{p^ip^l} + \eta^l_j f''_{p^iy^l}) - b_{ik}\eta^k_j = 0.$$

qui (pour $i = 1, 2, \ldots, n$) forment n systèmes de n équations linéaires

---

(³) C'est-à-dire relativement aux courbes de la famille suffisamment peu éloignées de l'extrémale Γ et peu inclinées sur elle.

(⁴) Cf. M. Morse, *The Calculus of Variations in the Large*, New-York, 1934, p. 37.

(⁵) Cf. J. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, Paris, 1910, p. 336.

(⁶) Étant sous-entendus les signes de sommation de 1 à n, grâce à la convention des indices répétés.

($j = 1, 2, \ldots, n$). Pour résoudre ces systèmes, on suppose dans la théorie classique le déterminant $|\eta_j^i(x)|$ différent de zéro (d'où la condition de Jacobi). Mais en un point x_0 où il s'annule, c'est qu'existe une même relation linéaire à coefficients non tous nuls entre les éléments de ses lignes $\lambda_k \eta_j^k = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), en sorte que *que si l'on impose aux variations* η^k *cette même relation* $\lambda_k \eta^k = 0$, les formes linéaires $a_{ik}\eta^k$ et la forme quadratique $b_{ik}\eta^i\eta^k$ *restent finies* pour $x = x_0$. Sous ces conditions et des relations linéaires convenables entre les formes $\varpi^i - a_{ik}\eta^k$, on peut alors assurer à $\delta^2 I$ une valeur positive.

STATISTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la convergence des estimations.* Note de M. **Étienne Halphen**, présentée par M. Émile Borel.

On rencontre en statistique le problème suivant :

Une série de k épreuves ayant donné les résultats numériques $x_1, x_2, \ldots, x_k$, *on évalue un paramètre m par une équation de la forme*

$$\Phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_k; m) = 0;$$

à quelle condition une racine de cette équation convergera-t-elle en probabilité vers une limite m_0 lorsque k augmente indéfiniment ?

M. Dugué a résolu la question moyennant une hypothèse sur la *forme* de Φ_k (séparation des variables x_i). Pour nous affranchir de ce genre d'hypothèses, nous regarderons Φ comme une fonctionnelle (de forme indépendante de k) de la *fonction aléatoire* $u_k(x)$ égale à zéro pour $x = -\infty$, et qui subit un saut de $+1/k$ lorsque x franchit chacun des x_i.

Dans la pratique, Φ ne possédera pas la continuité ordinaire en $u_k(x)$. En revanche, elle possédera un mode de continuité analogue à celle d'ordre 1, mais un peu plus générale, et que nous définirons ainsi :

Nous dirons qu'une suite de fonctions à variation bornée $f_n(x)$ converge (R, S) *vers la fonction à variation bornée* $f_0(x)$ *lorsque, quelle que soit la fonction* $\varphi(x)$ *intégrable* (R), *l'intégrale de Stieltjes* $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\, df_n$ *tend vers* $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\, df_0$.

Cette définition exprime notamment que la suite des dérivées $f'_n(x)$ est complètement intégrable.

A ce mode de convergence on associera comme d'ordinaire un mode de continuité (R, S) des fonctionnelles.

Cela posé, soit

$$\Phi[u_k(x);\, m] = 0$$

l'équation servant à estimer m. [Par exemple, Φ sera une fonctionnelle de la loi de probabilité $f(x, m)$ au paramètre inconnu m; mais il suffit de la regarder comme une fonction de m.]

On sait que, sous des conditions très larges, et $\varphi(x)$ étant intégrable (R), la valeur moyenne de $\varphi(x_i)$ converge en probabilité vers $E[\varphi(x)]$. Ce fait exprime que :

La fonction aléatoire $u_k(x)$ *converge* (R, S) *en probabilité vers la loi des probabilités totales* $F(x)$.

Si donc Φ est continue (R, S), $\Phi[u_k;\, m]$ converge en probabilité vers $\Phi[F;\, m]$.

Par une extension immédiate aux fonctionnelles du théorème sur les fonctions implicites, on en déduit que, sous les conditions visées précédemment :

L'estimation de m sera convergente si, au voisinage de la racine m_0 *supposée unique de* $\Phi[F(x);\, m] = 0$, *et dans un certain voisinage* (R, S) *de* $F(x)$:

1° $\Phi[G(x);\, m]$ *est continue* (R, S) *en* $G(x)$, *uniformément par rapport à* m;

2° $\partial\Phi/\partial m$ *existe, finie et différente de* 0 *pour* $G = F$, $m = m_0$, *et uniformément continue* (R, S) *en* G.

N. B. — L'*existence* de $\partial\Phi/\partial m$ en dehors de (F, m_0) est inutile si l'on sait que $\Phi[u_k;\, m] = 0$ est résoluble en m.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les séries entières lacunaires non prolongeables.* Note de M. **Georges Pólya**, présentée par M. Jacques Hadamard.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ *une suite d'entiers croissants* $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots)$. *Pour que chaque série, de rayon de convergence fini et positif, de la forme*

(1) $$a_1 z^{\lambda_1} + a_2 z^{\lambda_2} + \ldots + a_n z^{\lambda_n} + \ldots$$

admette son cercle de convergence comme coupure, il faut *et il suffit que*

(2) $$\lim_{n \to \infty} n \lambda_n^{-1} = 0.$$

Fabry, Faber et d'autres ont établi que la condition (2) est suffisante;

je démontrerai qu'elle est nécessaire en m'appuyant sur les résultats d'un Mémoire précédent ([1]).

LEMME. — *Si la suite d'entiers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ne satisfait pas à la condition* (2), *on en peut extraire une suite partielle $\mu_1, \mu_2, \ldots$ telle qu'en posant*

$$(3) \qquad \mathcal{G}(z) = \left(1 - \frac{z^2}{\mu_1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\mu_2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{\mu_j^2}\right)\cdots,$$

on ait, pour n tendant vers l'infini par valeurs entières,

$$(4) \qquad \varlimsup_{n\to\infty}\left(n - \frac{1}{2}\right)^{-1}\log\left|\mathcal{G}\left(n - \frac{1}{2}\right)\right| < 0.$$

Nous choisissons un (petit) nombre positif δ et une suite d'entiers croissants $n_1, n_2, \ldots$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

I. L'intervalle entre $(n_k - 1/2)/\sqrt{2}$ et $n_k - 1/2$, que je désignerai par $\mathcal{J}_k$, contient des λ_n en nombre supérieur à δn_k.

II. $n_{k-1}\sqrt{2} < n_k$, $\qquad \log\left[\left(\frac{n_k}{1}\right)^2 - 1\right]\left[\left(\frac{n_k}{2}\right)^2 - 1\right]\cdots\left[\left(\frac{n_k}{n_{k-1}}\right)^2 - 1\right] < \sqrt{n_k} - 1.$

Si la condition (2) n'est pas remplie, c'est-à-dire si la densité supérieure de la suite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ est positive, on peut facilement satisfaire à la condition I (voir *L. S.*, p. 558). On satisfera à la condition II en extrayant d'une suite qui satisfait à I une suite partielle à termes suffisamment espacés. Les λ_n contenus dans les intervalles $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \ldots, \mathcal{J}_k, \ldots$, numérotés par ordre de grandeur, constituent la suite $\mu_1, \mu_2, \ldots$. On a

$$\left(n_k - \frac{1}{2}\right)^{-1}\log\left|\mathcal{G}\left(n_k - \frac{1}{2}\right)\right| = \sum_{j=1}^{\infty}\left(n_k - \frac{1}{2}\right)^{-1}\log\left|\left(\frac{n_k - \frac{1}{2}}{\mu_j}\right)^2 - 1\right|.$$

Nous décomposons cette somme en trois parties $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$, en mettant le terme contenant μ_j en $\mathcal{S}_1$, en $\mathcal{S}_2$ ou en $\mathcal{S}_3$, selon que le point μ_j se trouve à gauche de $\mathcal{J}_k$, dans $\mathcal{J}_k$ ou à droite de $\mathcal{J}_k$. On a

$$\left(n_k - \frac{1}{2}\right)^{-1}\log\left|\mathcal{G}\left(n_k - \frac{1}{2}\right)\right| = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3 < \left(n_k - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{S}_2,$$

([1]) *Mathem. Zeitschrift*, 29, 1929, p. 549-640; ce Mémoire sera désigné dans ce qui suit, par *L. S.* (*Lücken und Singularitäten*). Le théorème énoncé ici résout un problème posé par M. Borel (*Comptes rendus*, 137, 1903, p. 695) en donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe de séries de Taylor soit singulière.

en vertu de la condition II et puisque, évidemment, $\mathcal{S}_3 < 0$. En étendant la somme qui suit aux entiers l compris entre les limites $(n_k - 1/2)/\sqrt{2}$ et $n_k\delta + (n_k - 1/2)/\sqrt{2}$, on a, en vertu de la condition I,

$$\mathcal{S}_2 < \sum \left(n_k - \frac{1}{2}\right)^{-1} \log\left[\left(\frac{n_k - \frac{1}{2}}{l}\right)^2 - 1\right] \sim \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\delta + \frac{1}{\sqrt{2}}} \log\left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt < 0,$$

ce qui démontre (4). Le lemme démontré, définissons $\mathcal{F}(z)$ par l'égalité

$$\mathcal{F}(z)\,\mathcal{G}(z) = \sin \pi z. \tag{5}$$

$\mathcal{F}(z)$ est une fonction entière, du type exponentiel (*L. S.*, p. 578). Il résulte de (3), (4), (5) que

$$|\mathcal{F}(z)| < -i \sin i\pi |z|, \quad \overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-1} \log |\mathcal{F}(r)| > 0.$$

La première de ces inégalités montre que le diagramme indicateur de $\mathcal{F}(z)$ (*L. S.*, p. 585) est contenu dans le cercle $|z| \leq \pi$ et la seconde que ce diagramme contient un point qui *ne se trouve pas sur l'axe imaginaire*. La frontière de ce diagramme indicateur (qui est un domaine convexe, symétrique par rapport à l'axe imaginaire comme par rapport à l'axe réel) ne peut donc pas contenir un segment de droite vertical de longueur 2π. D'où il suit (*L. S.*, p. 604-609) que la série entière

$$\mathcal{F}(1)z + \mathcal{F}(2)z^2 + \mathcal{F}(3)z^3 + \ldots$$

est prolongeable. Mais cette série est de la forme (1) [puisque $\mu_1, \mu_2, \ldots$ sont contenus dans la suite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$; voir (3) et (5)] et sa prolongeabilité résulte de la négation de l'hypothèse (2). C. Q. F. D.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les surfaces de Riemann définies par certaines fonctions entières*. Note de M. **Georges Valiron**, présentée par M. Émile Borel.

Soient $w = f(z)$ une fonction entière *d'ordre fini* et S la surface de Riemann décrite par w. La décomposition de S en feuillets F au moyen de demi-droites $\arg w = \text{const.}$, $|w| \geq W_j > 0$, issues des points critiques rencontrés dans le prolongement radial de la fonction inverse $z = \chi(w)$, fournit, lorsque $w = 0$ n'est pas valeur asymptotique, une décomposition

du plan des z en domaines Δ qui sont des domaines complets d'univalence de $f(z)$. On pourrait obtenir des domaines incomplets si $w = 0$ était valeur asymptotique (voir les travaux de M. Iversen), mais on peut alors, comme l'a observé M. Hibbert [1], marquer sur S les courbes $|w| = W_0$, où W_0 est distinct des modules des points critiques, et prolonger radialement de part et d'autre de ces courbes, en achevant de séparer, s'il y a lieu, certains feuillets par une demi-droite $\arg w = c_0$. Dans les deux cas, on peut avoir un nombre fini de *feuillets singuliers*; la frontière d'un feuillet singulier contient au moins un point critique transcendant à distance finie qui est point limite de points critiques algébriques. J'ai étudié un exemple très simple de ce cas dans un article qui doit paraître dans un autre recueil.

Je considère ici les feuillets *non singuliers* qui contiennent sur leur frontière une infinité de points critiques algébriques : les frontières radiales issues de ces points vont à l'infini, qui est point directement critique de seconde espèce. Des exemples simples sont fournis par

$$w = f(z) = \int_0^z (\cos z^p + \operatorname{ch} \alpha)\, dz,$$

où p est un entier positif, α réel et $|\alpha|$ assez petit lorsque $p > 1$. $w = \infty$ est le seul point critique transcendant; la frontière du feuillet F_0 issu de $w = 0$, $z = 0$, contient une infinité de points critiques algébriques dont les arguments ont pour limites $\pi h/p$, $h = 0, \pm 1, \ldots, \pm(p-1), p$; les frontières des autres feuillets n'en contiennent qu'un. $w = f(z^q)$ fournirait q feuillets de l'espèce indiquée, mais son ordre est pq.

Les fonctions d'ordre nul à croissance lente se prêtent à des constructions plus intéressantes. Je me bornerai à opérer sur un exemple numérique. Partons de

$$\Phi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - 2\cos\varphi_p \frac{z}{r_p} + \frac{z^2}{r_p^2}\right), \qquad r_p = A^{2^p},$$

où A est un nombre donné positif et très grand, et où les φ_p, $0 < \varphi_p < \pi$, vont être déterminés de proche en proche. Pour

$$\sqrt{r_{n-1} r_n} \leqq |z| \leqq \sqrt{r_n r_{n+1}}, \qquad n \geqq 2,$$

on peut écrire

$$\Phi(z) = \frac{z^{2n-2}}{r_2^2 \ldots r_{n-1}^2}\left(1 - 2\frac{z}{r_n}\cos\varphi_n + \frac{z^2}{r_n^2}\right)[1 + h_m^n(z)][1 + k_m^n(z)],$$

---

(1) *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 962.

le dernier facteur provenant des termes de $\Phi(z)$ tels que $p > m > n$. On a

$$|h_m^n(z)| < \frac{4}{r_{n-2}}, \quad |k_m^n(z)| < \frac{4 r_{n-1} r_n}{r_{m+1}}.$$

Il s'ensuit que, pour $|z| = r_n$,

$$w = f(z) = \int_0^z \Phi(z)\, dz = G_n(z)[1 + H_m^n(z)][1 + K_m^n(z)].$$

$$G_n'(z) = \frac{z^{2n-1}}{(2n-1) r_2^2 \ldots r_{n-1}^2}\left(1 - 2\frac{2n-1}{2n}\frac{z}{r_n}\cos\varphi_n + \frac{2n-1}{2n+1}\frac{z^2}{r_n^2}\right),$$

$H_m^n(z)$ ne dépend que de z, n, m, φ_2, φ_3, ..., φ_m. On a

$$(1) \qquad |H_m^n(z)| < \frac{30 n^2}{r_{n-1}}, \qquad |K_m^n(z)| < \frac{30 n^2 r_n r_{n-1}}{r_{m+1}}.$$

Lorsque l'argument de z croît de zéro à φ_n, w décrit une courbe simple Γ_n de S qui joint un point d'argument zéro du feuillet F_0 ($w = 0$, $z = 0$) à un point de ramification w_n. Γ_n reste dans la couronne $|w_{n-1}| < |w| < |w_{n+1}|$.

Sur Γ_n l'argument de w varie de 0 à ψ_n qui est l'argument de $G_n(z)$, $(2n-1)\varphi + \ldots$ augmenté des termes provenant de $H_m^n(z)$ et $K_m^n(z)$ dont (1) fournit des bornes; $H_n^n(z)$ sera déterminé lorsque φ_n sera à son tour choisi. Les φ_j ($j = 2, \ldots, n-1$) ayant été pris de proche en proche pour que l'écart deux à deux des valeurs réduites des ψ_j (comprises entre 0 et π lorsque w_j est sur F_0) soit au moins $\varepsilon_{n-1} = 100(n-1)^2/r_{n-3}$, on choisira φ_n pour que l'écart de la valeur réduite de ψ_n à celle des ψ_j précédents soit supérieur à ε_n, et pour que w_n soit placé, au choix, sur l'un des $n-2$ feuillets obtenus à partir de F_0 et de w_2, ..., w_{n-1}. Les $n-1$ premiers ψ_j seront alors connus à ε_n près, qui tend vers 0 avec $1/n$. *On pourra placer tous les w_n sur F_0, ou les introduire sur un nombre fini de feuillets, ou en mettre successivement une infinité sur tous, et faire en sorte que leurs arguments soient denses entre 0 et 2π sur les feuillets où on les place d'abord (denses entre 0 et π sur F_0).* Revenant au plan des z, *on voit qu'il existe des fonctions entières aussi lentement croissantes que l'on veut telles que les courbes argument w = const. qui passent par les zéros de $f'(z)$ coupent tout arc module w = const. en des points denses sur cet arc.*

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la théorie abstraite des fonctions analytiques* (1). Note (2) de M. **Max Zorn**, présentée par M. Élie Cartan.

Nous présentons ci-dessous un système d'axiomes caractérisant, d'une façon topologique, la famille des représentations conformes (et uniformes) dans une surface de Riemann (1).

Soient S un espace, $\mathfrak{F}$ une famille de transformations, satisfaisant aux axiomes 1-12 :

1. L'espace S est une variété orientable.

2. $\mathfrak{F}$ est une famille de fonctions (transformations, correspondances) F; les fonctions F sont définies sur des régions D (ensembles ouverts et connexes) de S; l'ensemble des valeurs F(D) est un sous-ensemble de S.

Nous désignerons les éléments F de $\mathfrak{F}$ comme *holomorphes* ou *holomorphes* ($\mathfrak{F}$). Si la transformation inverse de F existe, et, si F^{-1} est holomorphe, F est appelée *biholomorphe*.

3. Une fonction holomorphe est uniforme et continue; elle conserve l'orientation.

4. Une fonction holomorphe qui n'est pas constante est *ouverte*, c'est-à-dire l'image F (E) d'un ensemble ouvert E est ouvert.

Définitions. — *a.* La fonction définie par F sur une région D' faisant partie de D sera désignée par F/D' (fonction partielle).

b. Le produit FG de deux fonctions F, G est défini comme d'habitude : $FG(x) = F[G(x)]$. Il existe si F est définie pour les valeurs $G(x)$ de G.

5. *a.* Si F est holomorphe et définie sur D', F/D' est holomorphe.

b. Si F et G sont holomorphes et si FG existe, FG est holomorphe.

c. Si l'inverse d'une transformation holomorphe existe, F^{-1} est holomorphe.

d. L'identité I est toujours holomorphe.

e. Les *constantes* $F(x) = c$ sont holomorphes.

Définitions. — *a.* Une fonction F est *holomorphe au point p* si F/U_p est holomorphe pour un voisinage U_p de p.

---

(1) Voir S. Stoïlow, *Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1938; B. de Kerékjártó, *Enseignement math.*, 35, 1938, p. 297; M. Zorn, *Bull. of the Am. math. Soc.*, 43, 1937, p. 775.

(2) Séance du 20 février 1939.

b. F est *invertible au point p* si pour un voisinage U_p la transformation F/U_p est biunivoque.

c. Si F n'est pas invertible au point p, p sera appelé *point spécial pour* F.

6. Si pour une suite x_i de points différents et deux fonctions F, G holomorphes $\lim x_i = x^\star$, $F(x_i) = G(x_i)$, $F(x^\star) = G(x^\star)$, alors les deux fonctions F et G sont identiques.

7. Les points spéciaux d'une fonction holomorphe, qui n'est pas constante, constituent un ensemble discret (privé de points d'accumulation) dans la région de définition.

8. La famille $\mathfrak{F}$ contient au moins une fonction à point spécial isolé.

9. Si une fonction continue sur D est holomorphe pour tous les points de D à l'exception d'un ensemble discret, elle est holomorphe.

Les axiomes 10, 11, 12 se formulent à l'aide d'un système de régions C_p; C_p, défini pour tout point p de l'espace S, est homéomorphe à l'intérieur de la sphère n-dimensionnelle; la fermeture $\overline{C}_p$ est homéomorphe à la sphère fermée; C_p est un voisinage de p.

Définition. — Un ensemble A est borné s'il y a un C_p contenant A.

10. Pour deux régions D_1, D_2, bornées et homéomorphes à l'intérieur de la sphère, il existe toujours des F biholomorphes telles que $F(D_1) = F(D_2)$. De plus il est possible de s'arranger pour avoir $F(p_1) = p_2$, où les p_i sont choisis arbitrairement en D_i. Si les fermetures $\overline{D}_i$ sont homéomorphes à la sphère fermée, F possède un prolongement topologique $\overline{F}$ tel que $\overline{F}(\overline{D}_1) = \overline{D}_2$.

11. Si une famille $\{F\}$ de fonctions holomorphes est bornée, il existe une suite partielle F_i convergeant d'une façon continue, la limite continue étant holomorphe.

Définition. — Nous dirons que $C_1 \subset C$ est un *cercle* de l'ensemble C, supposé homéomorphe à la sphère et borné, si, pour un point p de C_1, il existe une infinité F_i de fonctions biholomorphes satisfaisant à

$$F_i(C) = C, \quad F_i(C_1) = C_1, \quad F_i(p) = p.$$

12. Si C_1 et C_2 sont deux cercles de C, et si C_1 est une image biholomorphe K (C) de C, alors K (C_2) est un cercle de C_1.

Définition. — Si $\mathfrak{F}_1$ est une famille de transformations dans S_1, $\mathfrak{F}_2$ une famille de transformations dans S_2, nous dirons que ($\mathfrak{F}_1$, S_1) et ($\mathfrak{F}_2$, S_2) sont équivalents s'il y a une correspondance topologique Φ telle que

$$\Phi(S_1) = S_2, \qquad \Phi \mathfrak{F}_1 \Phi^{-1} = \mathfrak{F}_2.$$

Théorème principal. — *Si une famille $\mathfrak{F}$ de transformations satisfait aux axiomes 1-12, elle est équivalente à la famille $\mathfrak{F}_a$ des fonctions uniformes définies sur des régions d'une surface de Riemann S_R, à valeurs en S_R, et à équations analytiques entre les variables localement uniformisantes de S_R.*

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE. — *Solution du problème de Carleman pour un intervalle fermé fini.* Note (¹) de M. **Henri Cartan**, présentée par M. Élie Cartan.

1. Étant donnée une suite illimitée de quantités A_n positives (finies ou infinies), on dit (²) qu'une fonction réelle $f(x)$, indéfiniment dérivable sur un intervalle I, appartient à la classe $\{A_n\}_I$ si à chaque $x_0 \in I$ on peut associer un voisinage $V(x_0)$ et un nombre fini $\lambda > 0$, de manière que l'on ait

$$|f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n A_n^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pour tout x qui appartient à I et à $V(x_0)$. Lorsque I est fermé fini, cette définition coïncide avec la définition classique de Hadamard et Denjoy. On se bornera au cas non trivial où les A_n ne sont pas tous infinis à partir d'un certain rang.

Le problème de Carleman (³) pour un intervalle I est celui-ci : *à quelle condition doivent satisfaire les coefficients A_n et A'_n de deux suites pour que la classe $\{A_n\}_I$ soit contenue dans la classe $\{A'_n\}_I$?*

S. Mandelbrojt et moi-même (³) avons donné une solution de ce problème pour un intervalle *ouvert* fini. Je vais en donner ici une solution pour le cas où l'intervalle fini I est *fermé* ou *semi-ouvert;* la solution est la même dans ces deux derniers cas, mais elle est autre que pour l'intervalle ouvert.

2. S. Mandelbrojt, qui a récemment étudié (⁴) les procédés de *régularisation* en général, avait introduit il y a plusieurs années le procédé dit de *régularisation exponentielle* pour les suites, procédé qui conduit précisément à la solution du problème de Carleman pour un intervalle ouvert (³). C'est

---

(¹) Séance du 27 février 1939.

(²) H. Cartan, *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 414.

(³) Pour la bibliographie, voir la Note citée en (²), et en outre la Note de S. Mandelbrojt et H. Cartan (*Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 555).

(⁴) *La régularisation des fonctions* (*Actualités scientifiques*, fasc. 733, 1938).

un mode de régularisation légèrement différent qui va nous servir dans le cas présent. Posons, pour $r > 0$,

$$U(r) = \max_{0 \leq n \leq r} \frac{r^{2n}}{n^n A_n},$$

puis, pour tout entier $n \geq 0$,

$$A_n^f = \overline{\text{borne}}_{n \geq r} \frac{r^{2n}}{n^n U(r)}.$$

On a $A_n^f \leq A_n$, et les A_n^f sont tous finis pour n assez grand. D'ailleurs, si l'on pose

$$B_n = \sqrt{n^n A_n},$$

et qu'on désigne par $\{B_n^0\}$ la régularisée exponentielle de la suite $\{B_n\}$, on a

$$\sqrt{n^n A_n^f} = B_n^0.$$

3. Cela posé, le problème de Carleman se trouve résolu par le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* I *un intervalle fini, fermé ou semi-ouvert. Pour qu'une classe* $\{A_n\}_I$ *soit contenue dans une classe* $\{A'_n\}_I$, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$(1) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\frac{A_n^f}{A'_n}\right)^{\frac{1}{n}} < +\infty,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1') \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\frac{A_n^f}{A'^f_n}\right)^{\frac{1}{n}} < +\infty.$$

La condition (1) est plus forte que la condition

$$(2) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\frac{A_n^0}{A'_n}\right)^{\frac{1}{n}} < +\infty,$$

relative au cas d'un intervalle *ouvert* fini ([3]). Mais pour $A'_n = n!$ les conditions (1) et (2) sont équivalentes; on retrouve ainsi un résultat de Mandelbrojt ([5]) : pour que toutes les fonctions d'une classe $\{A_n\}_I$ soient analytiques sur un intervalle I fini *fermé*, il faut et il suffit que

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\frac{A_n^0}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} < +\infty.$$

([5]) *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques* (*Collection Borel*, 1935), p. 79.

Au contraire, pour A'_n quelconque, la condition (2) n'est pas suffisante, en général, pour l'inclusion de la classe $\{A_n\}_I$ dans la classe $\{A'_n\}_I$, lorsque I est fermé.

4. Le théorème ci-dessus résulte des deux propositions suivantes, respectivement analogues aux deux propositions de la Note citée de S. Mandelbrojt et H. Cartan ([3]).

Proposition 1. — *Sur tout intervalle* I (*ouvert ou fermé, fini ou infini*), *les classes* $\{A_n\}_I$ *et* $\{A^f_n\}_I$ *sont identiques.*

Cela résulte de l'inégalité (5) de ma Note citée plus haut ([2]). Cette inégalité est relative aux maxima de trois dérivées successives (pas forcément consécutives) d'une même fonction sur un intervalle fini fermé.

Proposition 2. — *Sur un intervalle fini* I, *fermé ou semi-ouvert, la condition* (1) *est nécessaire pour que la classe* $\{A_n\}_I$ *soit contenue dans la classe* $\{A'_n\}_I$.

Les démonstrations paraîtront dans un autre Recueil.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les fonctions méromorphes dans un angle.* Note de M. **Jacques Dufresnoy**, présentée par M. Gaston Julia.

M. R. Nevanlinna ([1]) applique aux fonctions $f(z)$ méromorphes dans un angle les méthodes qu'il avait systématiquement utilisées dans ses recherches sur les fonctions méromorphes dans tout le plan fini. Il introduit une fonction caractéristique $S(r, f)$ *relative à l'angle considéré.* Elle satisfait à un premier théorème fondamental : la différence entre $S(r, f)$ et $S(r, 1/f)$ est bornée. D'autre part, il existe une fonction croissante de r qui diffère de $S(r, f)$ d'une quantité bornée.

J'ai été conduit à considérer la fonction $S(r, \sigma, f)$ *relative à un angle d'ouverture* π/σ ayant une bissectrice fixée. En supposant que σ est borné inférieurement, il est facile de montrer que, à une quantité bornée près, la fonction $C(r, \sigma, f)$ croît, non seulement avec r, mais aussi avec $1/\sigma$. La méthode de M. H. Cartan conduit alors au même résultat pour la fonction $S(r, \sigma, f)$ qui satisfait encore au premier théorème fondamental.

Je vais montrer que l'on peut étendre le deuxième théorème fondamental à des cas plus généraux que celui envisagé par M. Nevanlinna (fonctions méromorphes d'ordre fini dans tout le plan). Cette étude repose sur une

(1) *Acta Soc. Scient. Fennicae*, 50, 12, 1925, p. 1-45.

limitation de la dérivée logarithmique. J'ai obtenu les résultats suivants :

I. *Si dans un angle* W_1, *une fonction* $f(z)$ *est méromorphe d'ordre fini, dans tout angle intérieur* $A(r, f'/f)$ *et* $B(r, f'/f)$ *sont bornés.*

II. *Si dans un angle* W_1, *une fonction* $f(z)$ *est méromorphe d'ordre infini et y présente la fonction caractéristique* $S_1(r, f)$, *on a dans tout angle intérieur d'ouverture* π/σ, sauf pour des r exceptionnels,

$$A\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left[\int^r \log S_1(r, f) \frac{\log r \, dr}{r^{\sigma+1}}\right], \qquad B\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left[\frac{\log S_1(r, f)}{r^\sigma}\right].$$

III. *Soit, dans l'angle* W_1, *un secteur d'angle variable satisfaisant à* $\sigma = \varphi(r)$, *la fonction* $\varphi(r)$ *étant décroissante, bornée inférieurement et telle qu'il existe un nombre* k *pour lequel on ait, quels que soient* $r_1 < r_2$,

$$\varphi(r_1) - \varphi(r_2) > (r_2 - r_1) r_2^{-k}.$$

1° *si* $S[r, \varphi(r), f]$ *est d'ordre fini, on a*

$$A\left[R, \varphi(r), \frac{f'}{f}\right] = O(\log r) \quad \text{et} \quad B\left[R, \varphi(r), \frac{f'}{f}\right] = O(1);$$

2° *si* $S[r, \varphi(r), f]$ *est d'ordre infini, on a* sauf pour des r exceptionnels

$$A\left[r, \varphi(r), \frac{f'}{f}\right] = O\left[\log S[r, \varphi(r), f]\right], \qquad B\left[r, \varphi(r), \frac{f'}{f}\right] = O\left[\frac{\log S[r, \varphi(r), f]}{r^{\varphi(r)}}\right].$$

D'où les deux formes du deuxième théorème fondamental.

Théorème A. — *Si une fonction* $f(z)$ *est méromorphe dans un angle* W_1, *on a dans tout angle intérieur* W *d'ouverture* π/σ

$$(q-2) S(r, f) < \sum_{i=1}^{q} C(r, f - a_i) - \overline{C}(r) + R(r),$$

avec $R(r) = O(1)$ si la fonction $f(z)$ est d'ordre fini dans W_1 ; *avec*, dans le cas contraire et sauf pour des r exceptionnels,

$$R(r) = O\left[\frac{\log S_1(r, f)}{r^\sigma} + \int^r \log S_1(r, f) \frac{\log r \, dr}{r^{\sigma+1}}\right].$$

Théorème B. — *Si une fonction* $f(z)$ *est méromorphe dans un angle* W_1, *on a dans un secteur d'angle variable défini comme dans* III *et restant intérieur à l'angle* W_1

$$(q-2) S[r, \varphi(r), f] < \sum_{i=1}^{q} C[r, \varphi(r), f - a_i] + O\left[\log S[r, \varphi(r), f]\right],$$

sauf pour des r exceptionnels, lorsque la fonction $S[r, \varphi(r), f)]$ *est d'ordre infini; lorsqu'elle est d'ordre fini, on a sans restriction*

$$(q-2)\,S[R, \varphi(r), f] < \sum_{i=1}^{q} C[R, \varphi(r), f - a_i] + O(\log r).$$

Conséquences. — 1. $f(z)$ étant méromorphe dans un angle W_1 avec

$$S_1(r, f) = O[e^{r^k}],$$

on a dans tout angle intérieur d'ouverture $\pi/\sigma < \pi/k$ les propriétés suivantes :

a. Si, λ étant un nombre positif,

$$\int^{\infty} \frac{C(r, z)}{r^{\lambda+1}}\,dr < \infty$$

pour trois valeurs de z, il en est de même pour toutes (²).

b. Si $C(r, z)$ est borné pour trois valeurs de z, il l'est pour toutes.

c. Si $S(r) \to \infty$ avec r, le théorème du défaut s'applique.

2. Si, dans un angle W_1, la fonction $C_1(r, z)$ est au plus d'ordre $\rho(r)$ fini ou infini pour trois valeurs de z, il en est de même dans tout angle intérieur pour $S(r)$ et $C(r, z)$ quel que soit z.

3. Si, dans un angle W_1 d'ouverture π/σ_1, la fonction $C_1(r, z)$ est bornée pour trois valeurs de z, dans un angle intérieur W d'ouverture π/σ, on a $S(r, \sigma, f) = O[\log 1/(\sigma - \sigma_1)]$.

En particulier, si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans W_1, cela entraîne

$$\frac{\log M(r)}{r^{\sigma_1} \log \log r} = O(1),$$

$M(r)$ désignant le maximum de $|f(z)|$ sur l'arc du cercle $|z| = r$ intérieur à un angle W intérieur à W_1 (³).

(²) On peut faire sur $C(r, z)$ une hypothèse plus large (ordre infini); on obtient une proposition analogue. On peut aussi faire sur $S_1(r, f)$ des hypothèses plus larges, ce qui conduit à des propositions peu différentes.

(³) Bieberbach, *Math. Zeit.*, 3, 1919, p. 176, obtient une conclusion plus précise dans l'hypothèse plus restrictive de deux valeurs lacunaires finies. Cette conclusion plus précise est encore valable avec notre hypothèse lorsque $f(z)$ est méromorphe dans un angle W_0 extérieur à W_1 et y satisfait à $S_0(r, f) = O[e^{r^k}]$ avec $k < \sigma_1$.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Problème des sillages. Validité des solutions.* Note de M. **Adalbert Oudart**, présentée par M. Henri Villat.

I. Les résultats que nous allons énoncer concernent un obstacle dans un canal à parois curvilignes et font suite aux théorèmes énoncés par M. J. Kravtchenko ([1]) pour l'obstacle tranchant et le canal rectiligne, théorèmes qui constituent des extensions de quelques résultats de M. H. Villat ([2]) (cas de l'obstacle symétrique) et de M. J. Leray ([3]) (cas du fluide indéfini), ainsi que de M. C. Jacob ([4]).

Considérant l'écoulement avec sillage construit, à partir des fonctions $\Phi(s)$ et $\psi(s)$ et des paramètres a, b, ψ_1 et ψ_2, à l'aide des formules de M. Villat ([5]), nous nous proposons d'examiner des solutions correspondantes du point de vue des deux conditions de validité de M. M. Brillouin ([5]).

Rappelons que l'obstacle tranchant relativement à un axe est un obstacle qui n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à cet axe; nous dirons qu'un canal ou un sillage est monotone et divergent (ou convergent) si les parois ou les lignes libres ne sont rencontrées qu'en un point par une parallèle à un axe et vont en s'écartant (ou se rapprochant) de cet axe. Ainsi l'obstacle tranchant se traduit par $\Phi(s) \leqq 0$ pour $0 \leqq s \leqq s_0$ et $\Phi(s) \geqq 0$ pour $s_0 \leqq s \leqq \pi$; le canal monotone et divergent par $\psi(s) \leqq 0$ pour $0 \leqq s \leqq s_1$ et $\psi(s) \geqq 0$ pour $s_1 \leqq s \leqq \pi$.

Ceci posé, on a

Théorème 1. — *Si la vitesse sur l'obstacle et les parois, supposés quelconques, est inférieure à l'unité, les deux conditions de M. M. Brillouin sont satisfaites, le sillage est monotone et divergent, les lignes de jet concaves vers le sillage.*

Théorème 2. — *Si l'obstacle est tranchant et le canal monotone et divergent par rapport à la vitesse à l'infini amont, les lignes de jet ne se recoupent pas, le sillage est monotone et divergent.*

II. Nous allons maintenant considérer un canal rectiligne et un obstacle tranchant. M. J. Kravtchenko a montré ([6]) que l'inégalité $V \leqq 1$ était satis-

---

([1]) *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 208.

([2]) *Journal de Mathématiques*, 6e série, 10, 1914, p. 231.

([3]) *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 1282.

([4]) *Thèse*, Paris-Cluj, 1935, p. 116.

([5]) H. Villat, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides* (*Scientia*).

([6]) *Thèse* (sous presse).

faite si

$$(1) \qquad q \leqq \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad T(s) < 0,$$

$q =$ rayon du cercle intérieur de la couronne classique, $e^{T(s)} =$ vitesse le long de l'obstacle construit en fluide indéfini ([6]).

Il est possible de préciser la signification géométrique de la première condition (1) dans le domaine même du fluide.

Nous référant à une Note de M. J. Kravtchenko ([7]) basée sur un lemme dû à M. Leray, il suffira de vérifier

$$(2) \qquad \frac{\Lambda^2}{\sigma} \quad \frac{1}{\pi} L \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 0,21.$$

Soient δ_1 la largeur et δ_2 la profondeur de l'obstacle, δ_3 la diagonale du rectangle construit sur δ_1 et δ_2, d_1 la plus courte distance de l'obstacle aux parois.

Par un choix convenable de la sphère Σ, d'une majorante de σ et d'une minorante de Λ, l'inégalité (2) se transforme en une autre dans laquelle entrent explicitement le rapport $\delta_2 : \delta_1$, et implicitement le rapport $d_1 : \delta_1$ (ou $d_1 : \delta_3$). Les valeurs minima correspondantes de ces derniers rapports s'obtiennent ensuite par une méthode d'approximations successives; on obtient ainsi le tableau suivant :

$\delta_2 : \delta_1$....	0	0,5	1	1,5	2	2,5	∞
$d_1 : \delta_1$....	2,72	4,72	9,65	19,4	36	53	∞
$d_1 : \delta_3$....	2,72	4,22	6,6	10,8	16,1	19,7	∞

Si l'obstacle se termine aux extrémités d'un segment δ_1 perpendiculaire au canal et reste inclus dans le triangle curviligne amont limité à δ_1 et à deux arcs de cercles normaux à δ_1 et de rayon 0,69 δ_1, on peut choisir une minorante de Λ plus avantageuse et l'on obtient 1,83 au lieu de 2,72; le canal aura alors pour largeur minima 4,66 δ_1.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur le spectre de la turbulence homogène.* Note de M. **Jacques Kampé de Fériet**, présentée par M. Henri Villat.

La théorie statistique de la turbulence a conduit récemment G. I. Taylor ([1]) à des résultats importants concernant la répartition de l'énergie d'agitation entre les fréquences (spectre de la turbulence); dans ses

---

([7]) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 276.

([1]) *Proc. Royal Soc. London*, 164, 1938, p. 476-490.

travaux, comme d'ailleurs dans tous ceux consacrés à ce sujet, on suppose que ce spectre est continu; je me propose, en supprimant cette hypothèse, de montrer l'influence respective des *raies* et des *bandes* et d'indiquer *des cas très larges où il est effectivement légitime de supposer le spectre continu.*

Soient des particules en mouvement sur Ox; la vitesse d'agitation d'une particule à l'instant t sera une *fonction aléatoire* $U(t)$ au sens de M. E. Slutsky [2]; l'homogénéité de la turbulence correspond aux hypothèses

$$\overline{U(t)} = 0, \quad \overline{U(t)^2} = U_0^2, \quad \overline{U(t)U(t+h)} = U_0^2 R(h). \tag{1}$$

On a $R(h) = R(-h)$, si l'on suppose en outre $R(+0) = 1$, $U(t)$ *est continue en probabilité;* elle appartient à la classe *des fonctions aléatoires stationnaires* de Slutsky. Le déplacement d'une particule est donné par

$$X(t) = \int_0^t U(s)\,ds;$$

il est bien connu que

$$\overline{X(t)} = 0, \quad \overline{X(t)^2} = U_0^2 \int_0^t \int_0^t R(s_2 - s_1)\,ds_1\,ds_2. \tag{2}$$

Or A. Khintchine [3] a prouvé qu'il faut et il suffit, pour que $R(h)$ soit le coefficient de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire, qu'il soit représenté par une intégrale de Fourier-Stieltjes

$$R(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda h\, d\mathcal{F}(\lambda), \tag{3}$$

où $\mathcal{F}(\lambda)$ est une fonction monotone non décroissante, dont la variation totale est 1. Pour la turbulence, la fonction $\mathcal{F}(\lambda)$ définit la répartition de l'énergie cinétique, l'énergie correspondant à une raie (discontinuité λ_j) ou à une bande (distribution continue entre λ' et λ'') étant

$$U_0^2[\mathcal{F}(\lambda_j + 0) - \mathcal{F}(\lambda_j - 0)] \quad \text{et} \quad U_0^2[\mathcal{F}(\lambda'') - \mathcal{F}(\lambda')];$$

d'après sa signification, $\mathcal{F}(\lambda)$ est évidemment impaire si l'on pose $\mathcal{F}(0) = 0$.

En remplaçant R dans (2) et en intervertissant les intégrations [opéra-

(2) *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 878; *Att. Cong. Mat. Bologna*, 6, 1928, p. 111; *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, Roma, 8, 1937, p. 183-201.

(3) *Math. Ann.*, 109, 1934, p. 604-615.

tion légitime à cause de la convergence uniforme de (3)], il vient

$$\overline{X(t^2)} = 4U_0^2 \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos\lambda t}{\lambda^2} d\mathcal{F}(\lambda); \tag{4}$$

cette formule, définissant la dispersion pour toutes les valeurs de t, que le spectre soit continu ou non, contient tous les résultats antérieurs de G. I. Taylor, notamment ceux concernant $t \to 0$, $t \to +\infty$.

Décomposons la fonction monotone bornée $\mathcal{F}(\lambda)$ en $\mathcal{F}_c(\lambda) + \mathcal{F}_s(\lambda)$, $\mathcal{F}_c(\lambda)$ étant continue et $\mathcal{F}_s(\lambda)$ désignant sa fonction des sauts (fonction en escalier), ayant au plus une infinité dénombrable de discontinuités λ_j pour lesquelles nous posons [4]

$$A_0 = \mathcal{F}(+0) - \mathcal{F}(-0), \qquad A_j = A_{-j} = \mathcal{F}(\lambda_j + 0) - \mathcal{F}(\lambda_j - 0) \qquad (\lambda_j > 0),$$

nous obtenons cette valeur de la dispersion

$$\overline{X(t)^2} : U_0^2 = A_0 t^2 + 4\sum_0^{+\infty} A_j \frac{1-\cos\lambda_j t}{\lambda_j^2} + 4\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\lambda t}{\lambda^2} d\mathcal{F}_c(\lambda),$$

où *les deux premiers termes* [5] *expriment l'influence des raies et le troisième celui des bandes.* Or la somme des termes de la série et la portion de l'intégrale pour lesquelles respectivement $\lambda_j > l$ et $\lambda > l$ (l positif arbitraire) définissent des fonctions bornées de t, quel que soit t :

1° *Chaque fois que* $\overline{X(t)^2}$ *est une fonction non bornée quand* $t \to +\infty$ (ce qui est le cas dans toutes les expériences), *on peut affirmer l'existence dans le spectre d'au moins un des trois éléments suivants :*

α. *la raie* $\lambda = 0$; β. *une infinité de raies* λ_j *dans le voisinage de* $\lambda = 0$; γ. *une bande contenant* $\lambda = 0$.

Mais on peut préciser davantage; la formule d'inversion de Paul Lévy [6] permet de tirer de (3)

$$\mathcal{F}(\lambda + 0) + \mathcal{F}(\lambda - 0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda s}{s} R(s)\,ds.$$

---

(4) Les discontinuités sont supposées groupées de manière que $\lambda_j = -\lambda_{-j} > 0$.

(5) La série, uniformément convergente dans tout intervalle fini (à cause de la convergence de la série à termes positifs A_j), définit une fonction entière de t; la somme partielle pour laquelle $\lambda_j > l$ est une fonction quasi périodique.

(6) *Calcul des Probabilités*, Paris, 1925, p. 163-172.

Quand le coefficient de corrélation $R(h)$ est tel que dans $[\lambda', \lambda'']$

$$\lim_{m\to+\infty,\, n\to+\infty}\int_n^m \frac{\sin\lambda s}{s}R(s)\,ds = 0$$

uniformément par rapport à λ, on est certain de la continuité de $\mathcal{F}(\lambda)$ dans cet intervalle. En particulier

2° *Si* $R(h):h$, *qui a toujours pour limite* 0 *pour* $h\to+\infty$ *tend vers cette limite en décroissant*, $\mathcal{F}(\lambda)$ *est nécessairement continue pour toutes valeurs de* λ, *sauf éventuellement pour* $\lambda=0$.

3° *Si* $R(h):h$ *est absolument intégrable dans un intervalle* $0<H\leqq h\leqq+\infty$, $\mathcal{F}(\lambda)$ *est nécessairement continue pour toute valeur de* λ.

Dans les travaux expérimentaux on a toujours $R(h)>0$, et

$$L=\int_0^{+\infty}R(s)\,ds=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\pi}{2\lambda}[\mathcal{F}(\lambda+0)-\mathcal{F}(\lambda-0)]$$

a une valeur finie; la condition (3) étant alors satisfaite, la présence de raies dans le spectre est donc exclue.

HYDRODYNAMIQUE. — *Isotropie des mouvements turbulents et la répartition de l'énergie entre les translations et les rotations.* Note [1] de M. **Michel Luntz.**

G. I. Taylor introduisit, il y a quelques années, la notion de l'isotropie des mouvements turbulents [2]. Je me propose de montrer ici que cette hypothèse est conforme, sous certaines conditions, à l'équipartition de l'énergie entre les différents degrés de liberté, selon le principe général de Maxwell.

Soient u, v, w les composantes de vitesse du mouvement d'agitation. Taylor a montré que l'on a, entre autres, les égalités suivantes (les barres désignent les moyennes prises par rapport au temps) :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \overline{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}=\overline{\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2}=\overline{\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2}, \\ \overline{\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}=\overline{\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}=\ldots\ldots\ldots=2\overline{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}, \\ \overline{\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=-\dfrac{1}{2}\overline{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}. \end{array}\right.$$

---

(1) Séance du 20 février 1939.

(2) G. I. Taylor, *Proc. of Roy. Soc.*, A, 1935, 151, p. 421-478.

(En réalité le symbole $\partial u/\partial x$ désigne ici une *dérivée aléatoire en moyenne quadratique*, selon la conception de MM. Dedebant, Kampé de Fériet et Wehrlé.)

Soit $(\xi, \eta, \zeta) = \text{rot}(u, v, w)$. Le vecteur (ξ, η, ζ) donne la vitesse angulaire du fluide. On aura

$$(2) \qquad \overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \overline{\zeta^2} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 2\,\overline{\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x}} = 5\,\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}.$$

Si nous admettons que les particules ont une forme sphérique, et si R est leur rayon, l'énergie de rotation par degré de liberté de rotation sera (I étant le moment d'inertie par rapport à un axe)

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\,\overline{\xi^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\,m\mathrm{R}^2 . 5\,\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = m\mathrm{R}^2\,\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2},$$

où m est la masse de la particule.

D'autre part, l'énergie de translation par degré de liberté est $1/2\,m\overline{u^2}$.

Si le principe d'équipartition est vrai, on a

$$\frac{1}{2}\,m\overline{u^2} = m\mathrm{R}^2\,\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2},$$

d'où

$$(3) \qquad \mathrm{R}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{u^2}}{\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}.$$

Si R est constant, le rapport de $\overline{u^2}$ et de $\overline{(\partial u/\partial x)^2}$ l'est aussi.

Or Taylor a déjà montré [1] que l'on a

$$\frac{\overline{u^2}}{\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} = \lambda^2,$$

λ étant une certaine longueur constante, tout au moins dans une certaine région de l'espace. Taylor admet que λ [qui est le rayon de courbure au sommet de la courbe de corrélation $\mathrm{K}(y) = \overline{u(0)\,u(y)}/\overline{u^2}$] représente le diamètre des petits tourbillons.

Nous voyons que, dans notre cas (particules sphériques), on trouve $\lambda = \mathrm{R}\sqrt{2}$, soit une valeur comprise entre le rayon et le diamètre des particules élémentaires.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 437, formules (47) et (48).

Il est intéressant de voir encore ce que devient le tenseur de corrélation de Karman [4] dans le cas de nos hypothèses (équipartition de l'énergie et forme sphérique des particules).

Ce tenseur exprimant la corrélation entre les différentes composantes de vitesse en deux points distants de r, s'exprime par la relation

$$\mathcal{R}_{ij}=\left[1+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_0\right]\mathcal{J}_{ij}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_0 r_{ij},$$

où $\mathcal{J}_{ij}$ est le tableau unitaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le tenseur $r_{ij}=(x_i-x'_i)(x_j-x'_j)$; (x_1, x_2, x_3) et (x'_1, x'_2, x'_3) sont les coordonnées de deux points envisagés et la fonction

$$f(r, t)=1+\frac{r^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_0+\ldots$$

est la fonction de corrélation entre deux composantes de vitesse, prises suivant la direction du vecteur $\vec{r}$. On peut montrer que l'on a ici

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_0=-\frac{1}{2R^2};$$

donc

$$\mathcal{R}_{ij}=\left(1-\frac{r^2}{2R^2}\right)\mathcal{J}_{ij}+\frac{1}{4R^2}r_{ij}.$$

Remarquons enfin que, lorsque les particules ne sont plus sphériques, les mêmes raisonnements s'appliquent encore en admettant simplement que R est le rayon moyen de l'ellipsoïde d'inertie de la particule.

AÉRODYNAMIQUE. — *Sur les singularités dans l'étude d'ensemble d'une maquette d'aile.* Note [1] de M. **Louis Sackmann**, présentée par M. Henri Villat.

Nous avons fait simultanément sur une maquette d'aile la *mesure des pressions*, l'*étude du décollement* et la *détermination de la polaire*. Notre but

---

(4) Karman and Howarth, *Proc. of Roy. Soc.*, A, 164, 1938, p. 192-215.

(1) Séance du 13 février 1939.

était surtout d'étudier les singularités qui se présentent au voisinage de l'angle de portance maxima, au moment où s'établit le phénomène de la perte de vitesse.

Données numériques. — Profil Göttingen 430 entre plans parallèles, corde de référence : tangente à l'indrados, pression dynamique, $1/2\ \rho\ V_0^2 = 50^{mm}$ d'eau.

Mesure des pressions. — Les prises de pression, au nombre de 31, réparties sur deux arcs du profil médian (extrados et intrados), communiquent avec un multimanomètre par l'intermédiaire d'un réseau de tubes capillaires (aiguilles hypodermiques) logé à l'intérieur de l'aile.

Étude du décollement. — Le régime d'écoulement sur l'extrados de l'aile est étudié directement par notre méthode d'auto-inscription (²).

Détermination de la polaire. — Celle-ci a été établie jusqu'au delà de l'angle de portance maxima.

Représentation des mesures. — L'ensemble des résultats de mesure est condensé dans le diagramme de la figure ci-contre, en utilisant le système d'axes suivant : un axe parallèle à la corde de base du profil ; un axe parallèle aux génératrices de l'aile ; un axe perpendiculaire au plan de l'aile, et dans la direction duquel nous portons les valeurs algébriques des pressions réduites.

Nous représentons seulement les pressions sur l'extrados où se produit le décollement ; les mesures sont faites de 5° en 5° entre — 5° et + 35°. La perte de vitesse s'établit pour l'angle de + 25°.

Surface des pressions. — Cette surface est définie par les deux familles de courbes :

1° dans le sens de la corde, les profils de pression (i = const.) ;

2° dans le sens des génératrices, les courbes d'équidistance, dont chacune correspond à une prise de pression déterminée.

La surface des pressions comprend deux domaines :

a. Le domaine relatif aux faibles incidences (régime de vol normal), où le profil des pressions évolue en fonction de l'incidence dans le sens de l'augmentation continue de la portance jusqu'à l'angle de portance maxima. A ce moment d'ailleurs, bien que les fortes dépressions au voisinage du bord d'attaque aillent toujours en croissant, la surface des pressions commence à se creuser à partir du milieu de la corde, ce qui indique le début de l'instabilité de l'écoulement.

b. Le domaine relatif aux grandes incidences, où le profil des pressions est très aplati et pratiquement rectiligne, ce qui correspond à une diminution importante de la portance (40 pour 100) ; la surface des pressions

(²) L. SACKMANN, *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 1313, et **206**, 1938, p. 315.

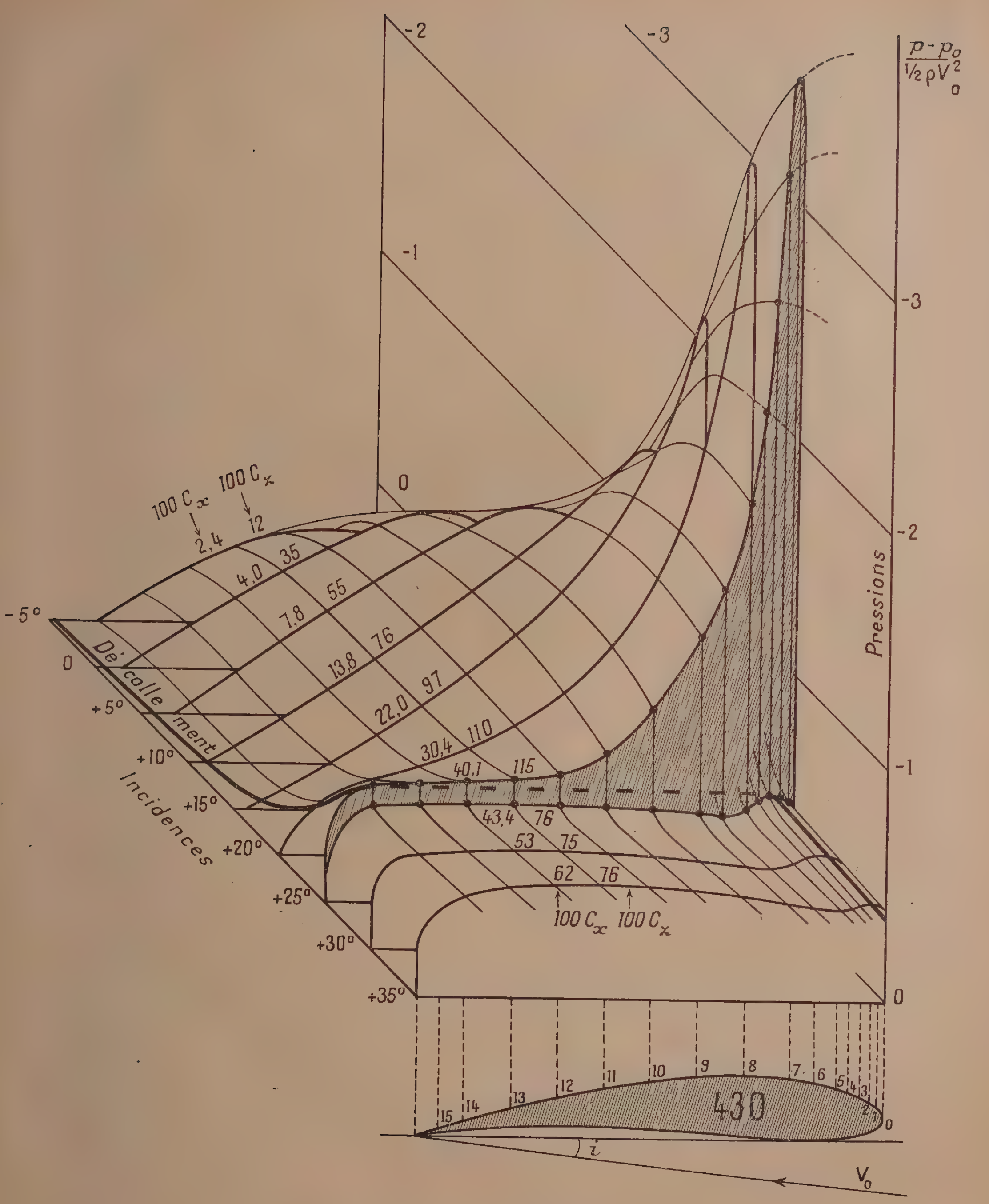


Diagramme complet d'une maquette d'aile.

ressemble alors à celle d'un obstacle ordinaire, à résistance de traînée seulement.

Ces deux domaines sont séparés par une discontinuité pour l'angle de $+25°$; mais, avec des précautions, on peut prolonger chacun de ces deux domaines au delà de cette limite (tracé en pointillé des courbes d'équidistance du diagramme). Ces prolongements correspondent du reste à des écoulements instables.

Indicatrice de décollement. — En marquant sur chaque profil de pression la position repérée du décollement, on définit l'*indicatrice de décollement*. Lorsque l'incidence croît à partir de $-5°$, l'indicatrice quitte peu à peu le bord de fuite de l'aile; elle s'en écarte du reste beaucoup quand on s'approche de la discontinuité. Puis le décollement saute brusquement vers le bord d'attaque, le sillage gagne de plus en plus la totalité de l'extrados de l'aile.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Les lacunes de l'anneau des astéroïdes considérées comme des phénomènes de résonance.* Note [1] de M. **Hervé Fabre**, présentée par M. Jean Chazy.

L'orbite de Jupiter étant supposée circulaire, de centre O, de rayon a' et sise dans le plan xOy, nous écrivons les équations du mouvement d'un astéroïde de masse évanouissante en nous servant des coordonnées de Laplace : $u = (x^2+y^2)^{-1/2}$, $w = z(x^2+y^2)^{-1/2} = \operatorname{tang}\varphi$, et θ, angle polaire dans le plan xOy. L'angle que fait le rayon vecteur de l'astéroïde avec celui de Jupiter étant désigné par H, nous avons comme fonction de forces

$$U = \frac{1}{r} + \lambda^2\left[\left(\frac{3}{4}\cos 2H + \frac{1}{4}\right)\frac{r^2}{a'^3} + \left(\frac{5}{8}\cos 3H + \frac{3}{8}\cos H\right)\frac{r^3}{a'^4} + \left(\frac{35}{64}\cos 4H + \frac{5}{16}\cos 2H + \frac{9}{64}\right)\frac{r^4}{a'^5} + \ldots\right],$$

où le coefficient λ^2 contient en facteur la masse de Jupiter dont il exprime l'ordre de grandeur. Nous devons ensuite développer U suivant les multiples de l'angle $\theta - n'(t-t_0)$, projection de H sur le plan xOy, puis exprimer les dérivées partielles de U par rapport à r, θ, φ. Notre attention sera fixée sur les astéroïdes dont l'excentricité et l'inclinaison ne sont pas

---

[1] Séance du 27 février 1939.

plus importantes que le premier ordre de grandeur en λ, et nous les supposerons de cet ordre-là pour établir les équations différentielles des orbites. Les termes seront négligés à partir du quatrième ordre, ce qui revient à négliger le carré de la masse de Jupiter. Admettons, en outre, que la différence $\theta - nt$ est constante, en moyenne, à des quantités près du second ordre, ce qui est exact dans la théorie ordinaire des perturbations. L'élimination du temps donne alors les équations

$$(1) \qquad \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \lambda^2 F(\theta) \frac{dw}{d\theta} + [1 + \lambda^2 G(\theta)] w = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \lambda^2 P(\theta) \frac{d\xi}{d\theta} + [1 - \lambda^2 Q(\theta)]\xi = -\frac{3}{2} w^2 - \lambda^2 R(\theta) + \text{termes en } \lambda^3,$$

dans lesquelles $F(\theta)$ et $P(\theta)$ se présentent sous la forme

$$A_0 \sin 2\psi + (A_1 \sin 3\psi + B_1 \sin\psi) + (A_2 \sin 4\psi + B_2 \sin 2\psi) + \ldots,$$

tandis que $G(\theta)$, $Q(\theta)$ et $R(\theta)$ se présentent sous la forme

$$(K_0 \cos 2\psi + L_0) + (K_1 \cos 3\psi + L_1 \cos\psi) + (K_2 \cos 4\psi + L_2 \cos 2\psi + M_2) + \ldots,$$

les indices 0, 1, 2, ... correspondant respectivement aux termes en r^2, r^3, r^4, ... du potentiel U. L'inconnue ξ de l'équation (2) est une quantité du premier ordre ayant pour partie principale $au - 1$ (a, demi-grand axe osculateur), et nous avons posé

$$\psi = \theta - n'(t - t_0) = \left(1 - \frac{n'}{n}\right)\theta + \text{const.},$$

moyennant l'assimilation de $\theta - nt$ à une constante.

Or les équations différentielles (1) et (2), qui sont linéaires à coefficients périodiques, admettent des zones d'instabilité analogues à celles qui existent pour l'équation plus simple

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + \left[D_0 + D_1 \cos\left(\frac{2\theta}{m} + m_1\right) + D_2 \cos\left(\frac{4\theta}{m} + m_2\right) + \ldots\right] f = 0,$$

au voisinage des valeurs entières de $m\sqrt{D_0}$ [2]. Cela veut dire que si les coefficients constants de (1) et (2) sont pris dans certains domaines voisins des valeurs entières de $2/(1 - n'/n)$ (valeurs qui définissent les commensurabilités du premier et du second ordre entre n et n'), la solution générale

---

[2] Voir, par exemple, le cas de l'équation de Mathieu (*Math. Ann.*, 99, 1928, p. 625).

de chaque équation est de la forme

$$C_1 e^{k\lambda\theta}\Psi(\theta) + C_2 e^{-k\lambda\theta}\Psi(-\theta) + \text{termes en } \lambda^2 + \ldots$$

(Ψ périodique, de même période que $\cos\psi$; k réel), compte non tenu du second membre de (2). Mais une telle variation de ϖ et de ξ fait croître les modules des extrema de ces fonctions au delà de toute limite; elle est inconcevable. *L'assertion que $\theta - nt$ est constant, en moyenne, au second ordre près, assertion qui nous a conduit aux équations* (1) *et* (2), *est donc inexacte dans une série de domaines correspondant aux commensurabilités du premier et du second ordre entre n et n'. Dans chacun de ces domaines, les moyens mouvements des astéroïdes subissent de fortes oscillations s'étendant sur un certain nombre de révolutions et impossibles à préciser autrement que par des intégrations numériques; n reste beaucoup plus longtemps voisin de ses valeurs extrêmes que de sa valeur moyenne, d'où la lacune.*

Étant données les dimensions de l'anneau des astéroïdes, les commensurabilités 3/1, 2/1, 5/3, 3/2 *sont les seules dont on est en droit d'affirmer qu'elles peuvent produire des lacunes importantes.* Ces lacunes existent en fait et sont les plus marquées de l'anneau (la dernière est d'ailleurs prolongée par une région où les astéroïdes sont très clairsemés) ([3]). Quant aux autres commensurabilités simples, d'ordre supérieur à 2, on est seulement certain qu'elles donnent lieu, relativement à la distribution des moyens mouvements, à de petites irrégularités rentrant dans la catégorie commune des phénomènes de résonance non linéaires.

Il est possible, d'autre part, que certaines lacunes (celle, entre autres, qui correspond à la commensurabilité 5/2 et qui divise l'ensemble des astéroïdes en deux groupes assez bien caractérisés) soient dues à la répartition initiale des orbites, mais cette question ressort de la cosmogonie. Enfin nous n'avons pas tenu compte de l'excentricité de Jupiter, qui intervient peut-être dans les effets de commensurabilité; son action semble se manifester, notamment, quand le rapport de commensurabilité est égal à 7/3.

([3]) La présence de termes en $\lambda^2 \cos h\psi$ dans le second membre de (2) constitue une deuxième cause d'instabilité de ξ lorsque le rapport n/n' est voisin de $h/(h-1)$ (premier ordre de commensurabilité). Cf. *Bull. Astr.*, 2e série, **11**, 1938, p. 97-99.

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Sur une anomalie de la période solaire* 1923-1933. Note de M. **Henri Mémery**.

On sait que, dans les périodes solaires comptées d'un minimum au minimum suivant, les taches augmentent en nombre et en étendue pendant 3 à 5 ans, passent par un maximum qui dure 1 an ou 2, puis décroissent pendant 6 à 8 ans pour recommencer un autre cycle. La phase de croissance se montre toujours plus courte que la phase de décroissance. Cette particularité s'applique d'ailleurs à presque tous les phénomènes de la nature.

Or une seule période par siècle fait exception à cette règle générale; cette période solaire est celle qui, dans chaque siècle, s'étend du minimum de 23 à celui de 33 : 1923-1933, 1823-1833, 1723-1733. Le maximum a lieu en 1928-1929. (Les observations antérieures au XVIIIe siècle comportent trop de lacunes pour fixer d'une manière précise les dates des périodes solaires précédentes.)

Si l'on examine les valeurs annuelles des taches solaires de 1920 à 1935 par exemple, les deux minima de 1923 et 1933 et le maximum de 1928-1929 sont bien apparents.

Taches solaires.

(Superficie annuelle, en millionièmes de l'hémisphère solaire, d'après les relevés publiés par l'Observatoire de Greenwich.)

1920...	836	1924...	362	1928...	1880	Max.	1932...	216	
1921...	570	1925...	1095	1929...	1690	Max.	1933...	124	min.
1922...	346	1926...	1657	1930...	706		1934...	141	
1923...	73 min.	1927...	1421	1931...	377		1935...	807	

(Les nombres relatifs de Wolf-Wolfer indiquent les mêmes variations.)

Chaque maximum d'une période solaire s'étend généralement sur deux années, le nombre des taches, facules et autres phénomènes de la surface du Soleil ne présentant pas de grandes différences lors des deux années du maximum.

Les nombres ci-dessus montrent qu'il existe un intervalle de 5 à 6 ans du minimum de 1923 au maximum de 1928-1929 (phase de croissance) et seulement de 4 à 5 ans du maximum de 1928-1929 au minimum suivant de 1933 (phase de diminution). C'est une exception remarquable à la règle générale énoncée plus haut.

Cette anomalie, qui ne s'observe qu'une fois par siècle et à la même époque d'un siècle à l'autre, confirmerait l'existence d'une période solaire de 100 ans que j'ai signalée précédemment, comprenant 9 périodes de 11,1 ans en moyenne.

On peut remarquer, à ce sujet, que les périodes solaires les plus courtes, c'est-à-dire d'une durée de 10 ans, sont plus nombreuses dans la première moitié de chaque siècle : 1913-1923; 1923-1933; 1933-(1943) ou 1833-1843. La période solaire la plus courte entre maxima se place de 1928-29 à 1937-38.

On ne trouve aucune période solaire de 10 ans entre minima dans la deuxième moitié du siècle dernier, au cours de laquelle les périodes solaires se présentent comme suit :

Périodes solaires entre minima...	1843-1856.	1856-1867.	1867-1878.	1878-1889.	1889-1901.
Durée en années...........	13	11	11	11	12

La période solaire du commencement du siècle actuel présente une durée de 12 ans, 1901-1913.

Une coïncidence curieuse doit être notée au point de vue météorologique : la deuxième moitié du siècle dernier renferme un plus grand nombre d'hivers rigoureux que la première moitié : 1894-95, 1890-91, 1879-80, 1870-71, 1854-55, contre 1829-30 et 1813-14.

La faible durée des époques correspondant aux diminutions d'activité des périodes solaires de courte durée paraît avoir pour effet de diminuer la durée et sans doute aussi l'intensité des époques de grands froids. Ces coïncidences pourraient justifier l'opinion courante d'après laquelle les saisons actuelles, notamment les hivers, n'ont pas la même intensité, ni la même régularité qu'autrefois.

GÉODÉSIE. — *Nouvelles mesures de l'intensité de la pesanteur dans les Départements d'Alger et de Constantine.* Note de M. **Jean Lagrula**, présentée par M. Georges Perrier.

Les résultats présentés dans le tableau ci-contre, obtenus au moyen du pendule Holweck-Lejay 42 *bis*, sont répartis en trois groupes : 15 stations, situées sur les Hauts-Plateaux, furent occupées en juin 1938; 16 stations, situées dans le Département de Constantine, le furent à l'aller et au retour

Les notations sont celles adoptées par l'Association internationale de Géodésie.

Station.	Date.	Longitude (E. de Greenw.).	Latitude.	Altitude.	Densité.	g.	g_0.	g''_0.	Formule de Helmert (1901). γ_0.	$g_0-\gamma_0$.	$g''_0-\gamma_0$.	Formule internationale (1930). γ'_0.	$g_0-\gamma'_0$.	$g''_0-\gamma'_0$.
	1938	° ′	° ′	mètres		gals	gals	gals	gals	mgals	mgals	gals	mgals	mgals
Beni-Mered........	9 juin	2.51,8	36.31,5	140	2,3	979,866	979,909	979,896	979,861	+ 48	+ 35	979,876	+ 33	+20
De Foucault.......	10 »	1.58,3	35.24,6	830	2,4	979,558	979,815	979,731	979,765	+ 50	— 34	979,780	+ 35	—49
Chellala..........	10 »	2.19,0	35.12,7	872	2,5	979,556	979,826	979,734	979,748	+ 78	— 14	979,763	+ 63	—29
Chegag............	11 »	2.25,5	34.41,8	880	2,5	979,474	979,746	979,654	979,704	+ 42	— 50	979,720	+ 26	—66
Aflou.............	12 »	2. 6,1	34. 7,0	1405	2,5	979,304	979,738	979,590	979,655	+ 83	— 65	979,671	+ 67	—81
Hassian-ed-Dib.....	12 »	1.49,8	34.28,1	1180	2,5	979,399	979,763	979,639	979,685	+ 78	— 46	979,701	+ 62	—62
El-Ousseukr.......	12 »	1.32,8	34.51,0	1134	2,5	979,469	979,819	979,700	979,717	+102	— 17	979,733	+ 86	—33
Zenina............	13 »	2.31,8	34.27,0	1091	2,5	979,398	979,734	979,620	979,683	+ 51	— 63	979,699	+ 35	—79
El-Hamman.........	13 »	2.51,0	34.39,6	1042	2,5	979,424	979,745	979,636	979,701	+ 44	— 65	979,717	+ 28	—81
Hassi-Bahbah......	14 »	3. 1,9	35. 4,0	891	2,5	979,512	979,787	979,694	979,735	+ 52	— 41	979,751	+ 36	—57
Aïn-Ouessera......	14 »	2.54,6	35.26,8	690	2,5	979,590	979,802	979,730	979,769	+ 33	— 39	979,784	+ 18	—54
Slim..............	15 »	3.44,2	34.53,7	1120	2,5	979,451	979,797	979,684	979,721	+ 76	— 37	979,737	+ 60	—53
Bou-Saâda.........	15 »	4.10,9	35.12,9	620	2,5	979,607	979,798	979,733	979,748	+ 50	— 15	979,764	+ 34	—31
Aïn-Hadjel........	16 »	3.53,1	35.40,2	570	2,4	979,627	979,803	979,746	979,787	+ 16	— 41	979,802	+ 1	—56
Tablat............	16 »	3.18,8	36.24,7	460	2,5	979,769	979,911	979,863	979,851	+ 60	+ 12	979,866	+ 45	— 3
Djidjelli.........	30 oct.	5.46,3	36.46,5	11	2,4	979,980	979,983	979,982	979,883	+100	+ 99	979,898	+ 85	+84
Collo.............	31 »	6.34,3	37. 0,4	10	2,7	979,997	980,000	979,999	979,903	+ 97	+ 96	979,918	+ 82	+81
Philippeville......	31 »	6.54,5	36.53,0	9	2,5	979,955	979,958	979,957	979,891	+ 67	+ 66	979,906	+ 52	+51
Col-des-Oliviers....	1er nov.	6.45,1	36.35,9	417	2,5	979,805	979,934	979,890	979,867	+ 67	+ 23	979,882	+ 52	+ 8
Oued-Zenati.......	2 »	7.10,2	36.19,1	622	2,5	979,716	979,908	979,843	979,843	+ 65	0	979,858	+ 50	—15
Guelma............	3 nov.	7.25,9	36.27,9	270	2,5	979,797	979,880	979,852	979,856	+ 24	— 4	979,871	+ 9	—19
Aïn-Mokra.........	3 »	7.27,3	36.50,2	31	2,6	979,936	979,945	979,942	979,888	+ 57	+ 54	979,903	+ 42	+39
Bône..............	4 »	7.46,0	36.53,8	2	2,6	979,956	979,957	979,956	979,893	+ 64	+ 63	979,908	+ 49	+48
Blandan...........	5 »	8.12,3	36.47,4	17	2,4	979,914	979,919	979,917	979,885	+ 34	+ 32	979,900	+ 19	+17
	1939													
Souk-Ahras........	12 janv.	7.59,1	36.17,1	672	2,6	979,713	979,920	979,847	979,840	+ 80	+ 7	979,855	+ 65	— 8
Clairefontaine.....	13 »	7.53,5	35.52,1	655	2,5	979,665	979,867	979,798	979,805	+ 62	— 7	979,820	+ 47	—22
Tebessa...........	13 »	8. 7,5	35.24,1	878	2,5	979,560	979,831	979,739	979,765	+ 66	— 26	979,780	+ 51	—41
La Meskiana.......	14 »	7.39,9	35.38,1	844	2,5	979,598	979,859	979,770	979,784	+ 75	— 14	979,799	+ 60	—29
Sedrata...........	14 »	7.31,9	36. 8,1	800	2,5	979,654	979,901	979,817	979,826	+ 75	— 9	979,841	+ 60	—24
Khenchala.........	15 »	7. 9,0	35.25,9	1125	2,5	979,516	979,864	979,746	979,767	+ 97	— 21	979,782	+ 82	—36
Canrobert.........	15 »	7. 7,0	35.52,5	979	2,5	979,603	979,890	979,792	979,805	+ 85	— 13	979,820	+ 70	—28
	1933													
Mechtat...........	23 sept.	6. 6,0	36.51,7	19	2,4	979,998	980,004	980,002	979,890	+114	+112	979,905	+ 99	+97
Hellalah..........	25 »	6.23,2	37. 3,0	670	2,7	979,845	980,051	979,975	979,906	+145	+ 69	979,921	+130	+54
Herbillon.........	26 »	7.22,9	37. 3,9	16	2,7	980,015	980,020	980,018	979,908	+112	+110	979,923	+ 97	+95
Gastu.............	27 »	7.19,3	36.42,1	68	2,5	979,907	979,928	979,921	979,876	+ 52	+ 45	979,891	+ 37	+30
Oued-el-Aneb......	27 »	7.29,7	36.52,8	58	2,6	979,930	979,947	979,941	979,891	+ 56	+ 50	979,906	+ 41	+35
Duvivier..........	28 »	7.43,4	36.29,4	95	2,5	979,836	979,865	979,855	979,858	+ 7	— 3	979,873	— 8	—18

d'une campagne en Tunisie qui fera l'objet d'une autre communication; enfin, 6 résultats proviennent du sauvetage d'une campagne effectuée, en 1933, avec un pendule dont la variation instrumentale était trop forte. En occupant à nouveau, en 1936, 1938 et 1939 un certain nombre des stations 1933, j'ai pu établir que la campagne à sauver pouvait être divisée en deux parties nettement distinctes; la première, durant laquelle on voit la variation instrumentale demeurer linéaire, bien qu'importante, permet une sûre interpolation des résultats, d'où les 6 stations récupérées de Mechtat, Hellalah, Herbillon, Gastu, Oued-el-Aneb et Duvivier; la seconde présente des variations plus complexes, et il vaut mieux n'en tenir aucun compte.

Ces mesures mettent en évidence une zone d'anomalies insuffisamment négatives sur les Hauts-Plateaux : les stations de Chellala (— 29) et El Ousseukr (— 33) sont en effet entourées d'anomalies comprises entre — 49 et — 66. Cette particularité, qui mériterait l'exécution d'un réseau plus serré, semble être en corrélation avec la présence de terrains jurassiques.

Au Nord de cette région, la station de Vialar présente une anomalie fortement négative. A Bou-Saâda, au contraire, nous trouvons de nouveau une anomalie insuffisamment négative, mais l'allure imposée aux courbes isanomales par la zone | Chellala-El Ousseukr | permet de l'expliquer.

Enfin, signalons au Sud du Département de Constantine une anomalie fortement positive, qu'il reste à discuter.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur la téléphonie en haute fréquence le long des lignes de transport d'énergie triphasées.* Note [1] de M. **Fernand Carbenay**, présentée par M. Camille Gutton.

Considérons une ligne de transport triphasée, uniforme, dont la phase I sert à la transmission téléphonique; les phases II et III sont identiques, symétriquement disposées, reliées à des impédances égales et forment un groupe assimilable à une ligne uniforme équivalente (2) dont l'extrémité ($x = 0$) est reliée à la terre par une impédance z_{20} pour la fréquence de transmission ($\omega/2\pi$).

---

[1] Séance du 27 février 1939.

Faisons $n = 2$ dans les équations de notre Note ([2]) précédente

$$A_1 = a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2, \qquad A_2 = a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2,$$
$$B_1 = a_1\beta_1 + b_1\beta_2, \qquad B_2 = a_2\beta_1 + b_2\beta_2,$$

et posons, pour la phase I,

$$R = R_1 + \rho_1, \qquad G = G_1 + g_{\substack{1\\2}}, \qquad L = L_1 + l_1, \qquad C = C_1 + \gamma_{\substack{1\\2}},$$

et pour la ligne (2) équivalente au groupe des phases II et III,

$$\mathcal{R} = R_2 + \rho_2, \qquad \mathcal{G} = G_2 + g_{\substack{2\\1}}, \qquad \mathcal{L} = L_2 + l_2, \qquad \mathcal{C} = C_2 + \gamma_{\substack{2\\1}},$$

avec

$$M = M_{\substack{1\\2}} = M_{\substack{2\\1}}, \qquad \gamma = \gamma_{\substack{1\\2}} = \gamma_{\substack{2\\1}}, \qquad \rho = \rho_{\substack{1\\2}} = \rho_{\substack{2\\1}}, \qquad g = g_{\substack{1\\2}} = g_{\substack{2\\1}},$$
$$a_1 = R + jL\omega, \qquad a_2 = \rho + jM\omega = b_1,$$
$$b_1 = \rho + jM\omega, \qquad b_2 = \mathcal{R} + j\mathcal{L}\omega,$$
$$\alpha_1 = G + jC\omega, \qquad \alpha_2 = -(g + j\gamma\omega) = \beta_1,$$
$$\beta_1 = -(g + j\gamma\omega), \qquad \beta_2 = \mathcal{G} + j\mathcal{C}\omega.$$

Les différences de potentiel, par rapport à la terre, et l'intensité des courants le long de chaque phase sont, en désignant par P_1, Q_1, P_2 et Q_2 quatre constantes complexes (à déterminer par les conditions aux limites),

$$U_1 = P_1 e^{r_1 x} + Q_1 e^{-r_1 x} + P_2 e^{r_2 x} + Q_2 e^{-r_2 x} \qquad \text{(phase I)},$$
$$U_2 = \sigma_1(P_1 e^{r_1 x} + Q_1 e^{-r_1 x}) + \sigma_2(P_2 e^{r_2 x} + Q_2 e^{-r_2 x}) \qquad \text{(phases II ou III)},$$
$$I_1 = h_1(P_1 e^{r_1 x} - Q_1 e^{-r_1 x}) + h_2(P_2 e^{r_2 x} - Q_2 e^{-r_2 x}) \qquad \text{(phase I)},$$
$$I_2 = k_1(P_1 e^{r_1 x} - Q_1 e^{-r_1 x}) + k_2(P_2 e^{r_2 x} - Q_2 e^{-r_2 x}) \qquad \text{(phases II et III)},$$

$$2r_1^2 = A_1 + B_2 + \sqrt{(A_1 - B_2)^2 + 4A_2B_1}, \qquad 2r_2^2 = A_1 + B_2 - \sqrt{(A_1 - B_2)^2 + 4A_2B_1},$$
$$\sigma_1 = \frac{r_1^2 - A_1}{B_1}, \qquad h_1 = \frac{b_1\sigma_1 - b_2}{a_1 b_2 - b_1^2} r_1, \qquad k_1 = \frac{b_1 - a_1\sigma_1}{a_1 b_2 - b_1^2} r_1.$$
$$\sigma_2 = \frac{r_2^2 - A_1}{B_1}, \qquad h_2 = \frac{b_1\sigma_2 - b_2}{a_1 b_2 - b_1^2} r_2, \qquad k_2 = \frac{b_1 - a_1\sigma_2}{a_1 b_2 - b_1^2} r_2.$$

Les constantes de propagation des deux couples d'ondes, se propageant le long de chaque phase, ont pour expression

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u' - \dfrac{v' + w'}{2\sqrt{v + w}}}{2\sqrt{u - \sqrt{v + w}}} + j\sqrt{u - \sqrt{v + w}}\right],$$

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u' + \dfrac{v' + w'}{2\sqrt{v + w}}}{2\sqrt{u + \sqrt{v + w}}} + j\sqrt{u + \sqrt{v + w}}\right],$$

([2]) *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 565.

où les termes réels et imaginaires représentent respectivement les constantes d'affaiblissement et les constantes de longueur d'onde.

$$u = \mathrm{RG} + \mathcal{R}\mathcal{G} - 2\rho g - (\mathrm{LC} + \mathcal{L}\mathcal{C} - 2\mathrm{M}\gamma)\omega^2.$$

$$u' = (\mathrm{LG} + \mathcal{L}\mathcal{G} + \mathrm{CR} + \mathcal{C}\mathcal{R} - 2\mathrm{M}g - 2\gamma\rho)\omega.$$

$$v = [\mathrm{RG} - \mathcal{R}\mathcal{G} - (\mathrm{LC} - \mathcal{L}\mathcal{C})\omega^2]^2 - (\mathrm{LG} - \mathcal{L}\mathcal{G} + \mathrm{CR} - \mathcal{C}\mathcal{R})^2\omega^2.$$

$$v' = 2(\mathrm{LG} - \mathcal{L}\mathcal{G} + \mathrm{CR} - \mathcal{C}\mathcal{R})[\mathrm{RG} - \mathcal{R}\mathcal{G} - (\mathrm{LC} - \mathcal{L}\mathcal{C})\omega^2]\omega.$$

$$\begin{aligned} w = {} & 4[(\mathrm{R}\mathcal{R} - \mathrm{L}\mathcal{L}\omega^2)(g^2 - \gamma^2\omega^2) + (\mathrm{G}\mathcal{G} - \mathrm{C}\mathcal{C}\omega^2)(\rho^2 - \mathrm{M}^2\omega^2)] \\ & - 8[(\mathrm{L}\mathcal{R} + \mathcal{L}\mathrm{R})g\gamma + (\mathrm{G}\mathcal{C} + \mathcal{G}\mathrm{C})\rho\mathrm{M}]\omega^2 \\ & - 4[(\rho\mathcal{G} - \mathrm{M}\mathcal{C}\omega^2)(\mathcal{R}g - \mathcal{L}\gamma\omega^2) + (\rho\mathrm{G} - \mathrm{MC}\omega^2)(\mathrm{R}g - \mathrm{L}\gamma\omega^2)] \\ & + 4[(\mathrm{M}\mathcal{G} + \mathcal{C}\rho)(\mathcal{L}g + \gamma\mathcal{R}) + (\mathrm{MG} + \mathrm{C}\rho)(\mathrm{L}g + \gamma\mathrm{R})]\omega^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -w' = {} & 4[(\mathrm{R}\mathcal{R} - \mathrm{L}\mathcal{L}\omega^2)2g\gamma + (\mathrm{L}\mathcal{R} + \mathcal{L}\mathrm{R})(g^2 - \gamma^2\omega^2) - (\rho\mathcal{G} - \mathrm{M}\mathcal{C}\omega^2)(\mathcal{L}g + \gamma\mathcal{R}) \\ & (\mathrm{M}\mathcal{G} + \mathcal{C}\rho)(\mathcal{R}g - \mathcal{L}\gamma\omega^2) - (\rho\mathrm{G} - \mathrm{MC}\omega^2)(\mathrm{L}g + \gamma\mathrm{R}) \\ & (\mathrm{MG} + \mathrm{C}\rho)(\mathrm{R}g - \mathrm{L}\gamma\omega^2) + (\mathrm{G}\mathcal{G} - \mathrm{C}\mathcal{C}\omega^2)2\rho\mathrm{M} + (\mathrm{G}\mathcal{C} + \mathcal{G}\mathrm{C})(\rho^2 - \mathrm{M}^2\omega^2)]\omega. \end{aligned}$$

Lorsque la ligne triphasée est suffisamment longue pour rendre négligeables les termes en $P_1 e^{l_1 x}$ et $Q_1 e^{-l_1 x}$, l'*impédance à l'émission* est, pour la phase utilisée en haute fréquence,

$$(\mathfrak{Z}_1)_{x=0} = - \frac{\sigma_2 - \sigma_1 + (k_1 - k_2) z_{20}}{h_1\sigma_2 - h_2\sigma_1 + (k_1 h_2 - k_2 h_1) z_{20}}.$$

Si les phases II et III sont isolées (z_{20} infini) ou en court-circuit (z_{20} nul), $(\mathfrak{Z}_1)_{x=0}$ a pour valeur, respectivement

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1 h_2 - k_2 h_1} \quad \text{ou} \quad - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{h_1\sigma_2 - h_2\sigma_1}.$$

MAGNÉTISME. — *Paramagnétisme constant du cérium tétravalent et d'autres ions ayant même nombre d'électrons que les gaz rares.* Note de M. **Gabriel Foëx**, transmise par M. Pierre Weiss.

Les sept premiers éléments de la famille du fer peuvent former des combinaisons dans lesquelles leur valence est égale au nombre total de leurs électrons $3d$ et $4s$. Les ions qui en résultent possèdent la même configuration extérieure que l'argon, tout au moins s'ils ne font pas partie d'une combinaison complexe.

Les trois premiers de ces ions (K^+, Ca^{++}, Sc^{+++}) sont diamagnétiques. Il est bien connu que les suivants possèdent, au contraire, un paramagnétisme faible, indépendant de la température et croissant avec la charge de l'ion.

Ce paramagnétisme est entièrement inexpliqué ; il est utile de rassembler et de compléter les données que l'on possède à son sujet.

Les susceptibilités atomiques de quelques-uns de ces ions sont rassemblées dans le tableau ci-dessous ; elles sont corrigées du diamagnétisme du reste de la molécule.

Substance.....	TiO^2.	$TiCl^4$.	V^2O^5.	VO^3Na.	CrO^3.	$Cr^2O^7K^2$.	MnO^4K.
$\chi_a \cdot 10^6$.......	+15 (1)	+26 (2)	+44 (3)	+42 (3)	+60 (4)	+63 (4)	+57 (4)

Le paramagnétisme de $Cr^2O^7K^2$ et de MnO^4K se conserve en solution (4). L'exemple de $TiCl^4$ montre qu'il ne s'agit pas d'une propriété spéciale des oxydes ou des anions complexes. Les homologues supérieurs des ions précédents, dont la structure est celle de l'un des homologues de l'argon, en fournissent une nouvelle preuve :

Substance.......	MoF^6.	WF^6.	WCl^5.	Re^2O^7.	UO^{2++}.	UF^6.
$\chi_a \cdot 10^6$..........	+10 (5)	−4 (5)	+40 (6)	+90 (7)	+75 (8)	+80 (5)

Dans la famille des terres rares le lanthane trivalent est diamagnétique comme le scandium trivalent dans la famille du fer.

Le paramagnétisme du cérium tétravalent demandait à être confirmé, étant donné le désaccord des résultats publiés à son sujet :

Substance.....	CeO^2.	$Ce(SO^4)^2$.	CeO^2.	CeO^2.	CeO^2.
$\chi_M \cdot 10^6$.........	+16 (2)	+37 (9)	+22 (10)	−14 (11)	−7 (11)

Les divergences tiennent probablement à de petites quantités de néodyme.

J'ai étudié un sulfate cérique, préparé à partir d'un oxyde mis à ma disposition par M. F. Trombe. Les mesures ont été faites dans une atmosphère d'hydrogène à la température ordinaire et à celle de l'air liquide.

(1) Ray Chandhuri et Sengupta, *Indian Journ. Phys.*, **19**, 1936, p. 245.
(2) Vaidhyanathan et Singh, *Indian Journ. Phys.*, **7**, 1932, p. 19.
(3) Perakis, *Journ. Phys. et Radium*, **8**, 1927, p. 473.
(4) Paule Collet, *Comptes rendus*, **181**, 1925, p. 1057 ; **183**, 1926, p. 1031 et mesures inédites.
(5) Henkel et Klemm, *Zeits. anorg. Chem.*, **222**, 1935, p. 70.
(6) Klemm et Steinberg, *Zeits. anorg. Chem.*, **227**, 1936, p. 193.
(7) Schuth et Klemm, *Zeits. anorg. Chem.*, **220**, 1934, p. 193.
(8) Nicolau, *Comptes rendus*, **205**, 1937, p. 654.
(9) Hausknecht, *Thèse*, Strasbourg, 1914, p. 22.
(10) A. Serres, *Journ. Phys. et Radium*, **6**, 1935, p. 339.
(11) Klemm, Meisel et Vogel, *Zeits. anorg. Chem.*, **190**, 1930, p. 123.

Les variations thermiques de la susceptibilité permettent de déceler les dernières traces d'impuretés à paramagnétisme variable et d'éliminer les erreurs dues à leur présence ([12]).

La susceptibilité moléculaire trouvée pour $Ce(SO^4)^2\,4H^2O$, corrigée du paramagnétisme parasite, a pour valeur

$$\chi_M = -97.10^{-6}.$$

En admettant $(SO^4)^2$ et pour H^2O les diamagnétismes -67 et -13, il reste pour l'ion cérique

$$\chi_a = +22.10^{-6}.$$

L'ion cérique possède donc le même paramagnétisme faible et d'origine inconnue que les ions de la famille du fer, ayant comme lui une configuration de gaz rare.

SPECTROSCOPIE. — *Absorption de l'acroléine dans le spectre infrarouge.* Note de MM. **Pierre Lambert** et **Jean Lecomte**, présentée par M. Aimé Cotton.

Nous avons utilisé nos dispositifs habituels pour obtenir, entre 500 et 1400 cm⁻¹ environ, le spectre d'absorption de l'acroléine à l'état de vapeur ([1]). Suivant la région étudiée, un tube de $9^{cm},5$ ou de 2^{cm} de longueur, fermé par des lamelles en sel gemme ou en bromure de potassium, contenait de l'acroléine sous forme de vapeur saturante à la température ordinaire. Malgré la faible quantité de substance qui se trouve ainsi sur le trajet des radiations, nous avons obtenu un spectre très net, avec des absorptions qui atteignent 80 pour 100. Les principaux maxima se trouvent à

λ	13,76 (f)	10,88 (TF)	10,43 (aF)	8,89 (F)	7,30 (aF)	μ
ν	727	919	957	1124	1369	cm^{-1}

La bande de $8^{\mu},89$ ($1124\ cm^{-1}$) est particulièrement fine dans les conditions de l'expérience, ce qui indique l'absence de polymérisation.

D'autre part, un gel d'acroléine, obtenu par polymérisation, nous a

([12]) D'après les mesures magnétiques, le sel que j'ai étudié contenait moins de 3/1000ᵉ de son poids de sulfate de néodyme.

([1]) *Comptes rendus*, **189**, 1929, p. 155; **196**, 1933, p. 1011.

fourni, sous une épaisseur de $0^{mm},01$ environ et entre 700 et 1400 cm^{-1}, un spectre rappelant celui de la vapeur, mais dans lequel les trois bandes de 919, 957 et 1124 cm^{-1} sont remplacées par une seule bande très large et très intense, dans laquelle on distingue assez mal plusieurs maxima partiels. Cette expérience suggère la possibilité de suivre, au moyen du spectre infrarouge, la polymérisation de l'acroléine. Nous rappelons, à ce propos, que, pendant la durée nécessaire de l'enregistrement du spectre, une demi-heure environ, nous n'avons jamais constaté d'effet photochimique sur les composés étudiés, ce qui nous a permis de suivre, par exemple, la polymérisation du cyclopentadiène ([2]).

Interprétation des résultats. — Le spectre Raman de l'acroléine liquide a été relevé par Bourguel et Piaux ([3]), qui donnent les raies

315 (f), 570 (bm), 1160 (baF), 1278 (m), 1364 (TF), 1426 (f),
1618 (F), 1692 (bl TF) cm^{-1}.

Sauf la raie 1364, aucune de ces fréquences ne se retrouve dans nos résultats.

D'après la théorie cependant, toutes les vibrations de la molécule d'acroléine sont actives, à la fois, dans l'absorption et dans la diffusion. Suivant nos déterminations personnelles sur d'autres substances organiques, le passage de l'état liquide à l'état de vapeur ne saurait pas, à lui seul, expliquer cette divergence. Elle proviendrait principalement, à notre avis, de ce que, sous l'influence des radiations ultraviolettes utilisées pour l'excitation des raies Raman, l'acroléine se polymérise rapidement, ce qui se traduit par le trouble constaté par Bourguel et Piaux et par la présence de bandes larges dans le spectre de diffusion.

Pour essayer d'expliquer l'apparition des bandes que nous avons mesurées, nous commencerons par comparer le spectre infrarouge de l'acroléine, d'après les résultats de différents auteurs, avec les spectres infrarouge et Raman de composés de la forme $(CH^2) = (CH) - X$ (X représentant CH^3, Cl, Br, I etc.). On constate ainsi que la fréquence 727 cm^{-1} se retrouve très déplacée vers les basses fréquences à mesure que le poids du substituant augmente, ce qui permet de la regarder comme une fréquence caractéristique de la liaison C — X. Le modèle simplifié à *trois masses*, que nous venons de considérer, possède encore deux autres fréquences fonda-

([2]) *Ann. de Phys.*, 11e série, **10**, 1938, p. 542.
([3]) *Bull. Soc. Chimique*, 5e série, **2**, 1935, p. 1958.

mentales, l'une qui est à chercher vers 400-425 cm^{-1} (vibration de déformation) et l'autre qui se place vers 1600 cm^{-1} ($C=C$).

Mais cette conception simplifiée laisse, ainsi qu'on pouvait le prévoir, plusieurs bandes sans les expliquer. Ainsi la fréquence 919 cm^{-1}, qui reste sensiblement constante, lorsque l'on fait varier le substituant X, ne peut être interprétée qu'en revenant au modèle moléculaire normal de l'acroléine. Il en est de même de la bande de 1369 cm^{-1}, peut-être double, qui se rattache à une déformation de la molécule dans laquelle les atomes d'hydrogène jouent un rôle prépondérant $\delta(CH)$. Actuellement, il serait hasardeux de pousser plus loin l'identification des fréquences observées avec des modes de vibration déterminés de la molécule d'acroléine, et la comparaison avec les résultats bien établis pour l'éthylène (en considérant le groupement COH comme une masse unique) ne conduit pas à une plus grande certitude.

La comparaison du spectre de l'acroléine avec ceux des dérivés vinylés indique que la bande de 1124 cm^{-1} est probablement à relier avec la présence de la fonction aldéhyde, car elle n'existe que pour l'acroléine. Cette conclusion est en accord avec l'absorption infrarouge des aldéhydes saturés.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Sur la cassure des noyaux d'éléments plus légers que l'uranium, sous le bombardement des neutrons.* Note [1] de M. **Claude Magnan**, présentée par M. Maurice de Broglie.

Les expériences de O. Hahn et F. Strassmann [2] et de F. Joliot [3] ont montré récemment la cassure du noyau d'uranium sous l'action des neutrons en baryum et en un autre noyau de numéro atomique complémentaire.

Utilisant le générateur de neutrons du Laboratoire des rayons X, j'ai trouvé, en irradiant de l'uranium pendant 2 heures et en utilisant la méthode des dépôts actifs employée par F. Joliot, trois périodes pour la cassure de l'uranium, à savoir 45 sec., 18 min., 55 min.

Des essais faits par la même méthode, sur l'or, le bismuth et le mercure indiquaient deux périodes de 22 sec. et de l'ordre de 2 min. pour l'or, mais ce résultat était douteux à cause du peu d'intensité de l'activité.

---

(1) Séance du 27 février 1939.

(2) *Naturwiss.*, 27, 1939, p. 11.

(3) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 341.

J'ai préféré, afin de lever le doute possible sur l'origine de cette activité, employer la chambre d'ionisation à amplificateur proportionnel, réalisée il y a quelques années par Maurice de Broglie et Louis Leprince-Ringuet ([4]).

Cette méthode déjà utilisée par O. R. Frisch ([5]) pour l'étude de l'uranium, montre le grand pouvoir ionisant des fragments de noyaux, 3.10^6 paires d'ions, ce qui permet de ne confondre ce phénomène avec aucune des causes possibles d'ionisation, comme les particules α ou les protons.

J'ai d'abord appliqué cette méthode à l'uranium, comme O. R. Frisch, afin de trouver le rendement du dispositif. Avec une chambre d'ionisation de 10^{mm} de diamètre et de 50^{mm} de haut, placée à 6^{cm} de la cible de lithium, émettrice de neutrons, on obtient 20 noyaux de recul par minute, avec des énergies comprises entre 49 MeV et 98 MeV. La chambre est à air et de petites dimensions pour éviter l'effet parasite trop grand dû aux particules α de UII.

Pour les corps de masses atomiques plus faibles que celle de l'uranium que j'ai successivement étudiés, j'ai préféré, pour augmenter le rendement, utiliser une chambre de 33^{mm} de diamètre et de 50^{mm} de haut.

J'ai trouvé, toujours avec une puissance en neutrons équivalente à 20^{gr} de Be + Rn, des résultats négatifs pour : bismuth, tantale, tellure, cadmium, argent, palladium, molybdène, zirconium, strontium.

Par contre un effet positif fut trouvé pour l'or, le tungstène, le titane.

Pour l'or et le tungstène, la courbe des *packing fractions*, qui se trouve montante et linéaire, permet d'envisager la réalité de ce phénomène. Il n'en est plus de même pour le titane, dont le *packing fraction* se trouve à la limite de la partie descendante de la courbe pour les éléments légers et de la partie minimum, assez confuse, de cette courbe.

Les énergies des noyaux de recul de ces éléments sont égales à 25 MeV, pour le tungstène et le titane et comprises entre 40 MeV et 67 MeV pour l'or.

Chacun de ces corps fut observé pendant 15 min. et l'expérience répétée.

Pour l'or, on observe 1 noyau par 2 min.; pour le tungstène et le titane, on observe 1 noyau toutes les 2 ou 3 min. en moyenne.

([4]) *Bull. Soc. fr. de Physique,* séance du 15 avril 1932.

([5]) *Nature,* **143**, 1939, p. 276.

Pour écarter les effets parasites dus à la présence de la haute tension du générateur, j'ai opéré, en remplaçant le corps irradié par un manchon de paraffine. L'essai fut négatif.

Pour écarter des impulsions parasites de l'amplificateur, l'observation fut faite, le générateur étant arrêté, et fut aussi négative.

Sauf pour l'or, où le résultat fut incertain, il n'a pas été possible de constater la présence d'une activité, par dépôt actif, car le phénomène est trop faible. A plus forte raison aucun entraînement chimique n'a pu être tenté pour identification.

CHIMIE NUCLÉAIRE. — *Sur la rupture des noyaux d'uranium sous l'action des neutrons et la libération d'énergie qui en résulte.* Note de MM. **Jean Thibaud** et **André Moussa**, présentée par M. Maurice de Broglie.

Nous sommes en mesure d'apporter les précisions suivantes à nos précédentes déterminations expérimentales montrant la rupture de l'uranium en noyaux de poids atomiques voisins de 90 à 150 [1].

A. Détection des noyaux de rupture fortement ionisants, l'uranium étant introduit dans la chambre d'ionisation à amplification linéaire :

a. Distribution des énergies de recul. — Dans la statistique des énergies entre les différentes impulsions enregistrées à l'oscillographe, on note une décroissance très rapide depuis les énergies les plus petites, de l'ordre de 10 à 15 MeV, jusqu'à celles représentant la limite supérieure : cette distribution correspond aux émissions dans les différentes directions et aux pertes d'énergie variables pour les noyaux de recul produits en profondeur dans la préparation d'uranium.

Des impulsions assez nombreuses encore correspondent à une énergie des noyaux de recul de 65 MeV. Cette valeur paraît la limite supérieure de l'énergie de chacune des particules produites (s'il existe des énergies plus grandes, celles-ci seraient très rares) : la libération de l'énergie lors de la cassure serait ainsi supérieure à $2 \times 65 = 130$ MeV, valeur en accord avec les pertes de masse résultant de la rupture en éléments moyens.

b. Portée R *des noyaux de recul dans l'aluminium.* — Les noyaux traversent sans difficulté $0^{\mu},48$. Avec $3^{\mu},4$, il ne reste que 8 pour 100 de particules ayant une énergie supérieure à 10 MeV. Ce nombre tomberait

---

[1] J. Thibaud et A. Moussa, *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 652.

à 2 pour 100 pour $4^{\mu},35$. La portée limite dans l'aluminium serait de 5^{μ}. Ce résultat, comparé aux portées des particules α ($R = M z^2 R_{\alpha}$), nous indique que le noyau de recul porte, en moyenne, une quinzaine de charges positives : chacun des noyaux conserverait avec lui, au moment de l'explosion, une vingtaine d'électrons (charge positive résiduelle 30) et réduirait progressivement sa charge positive jusqu'à quelques unités, le long du parcours, par capture d'électrons.

c. Section effective de rupture de l'uranium. — Connaissant l'ordre de grandeur de la portée des noyaux de rupture observables dans une préparation d'uranium et le nombre de ruptures observées par seconde, on peut calculer la section efficace pour la rupture du noyau d'uranium comme étant, au plus, $\sigma = 10^{-25}\,\mathrm{cm}^2$ ([2]), valeur qui correspond à un processus de résonance sous l'action des neutrons *rapides*. Ceci permet de calculer la largeur du niveau de résonance qui intervient dans le processus de rupture.

d. Influence des neutrons lents. — Entre la chambre d'ionisation renfermant l'uranium et la source de neutrons recouverte de paraffine, on dispose deux écrans, l'un de cadmium, l'autre contenant suffisamment de bore pour que tous les neutrons lents d'une énergie inférieure à 100 volts soient pratiquement arrêtés. Aucune modification sur la distribution des énergies de recul n'est ainsi observée par rapport à l'expérience de contrôle, en l'absence d'absorbants neutroniques.

Une autre expérience corrobore ce résultat : de l'oxyde d'urane irradié par les neutrons rapides, sans paraffine et à l'abri (écrans Cd + B) des neutrons lents, est traité de la manière décrite ([1]) : le précipité AgBr obtenu montre une activité peu inférieure à celui obtenu à partir d'uranium irradié en présence de paraffine.

Ainsi les neutrons d'énergie supérieure à 100 volts (ou peut-être les rayons gamma) joueraient un rôle important dans le processus de rupture de l'uranium.

Il semble qu'il faille ainsi fournir une énergie assez considérable pour obtenir la cassure : le noyau d'uranium se trouverait assez éloigné de la rupture spontanée.

e. Des préparations d'autres éléments lourds, Bi, Pb, Tl, Ta, W, Mo, sont placées dans la chambre d'ionisation, dans les mêmes conditions que l'uranium, et irradiées par les neutrons en présence de paraffine : si ces

---

([2]) En accord avec la section efficace donnée par F. Joliot (*Comptes rendus*, 208, 1939, p. 341).

éléments présentaient le phénomène de cassure, la probabilité en serait plus de 250 fois plus faible que dans le cas de l'uranium.

B. L'identification d'un radioélément ayant les propriétés chimiques d'un halogène et pouvant résulter de la cassure de l'uranium irradié a été poursuivie par les expériences suivantes :

1° Le radioélément a été isolé, *a*. par distillation de l'acide bromhydrique à partir de l'uranium irradié additionné de bromure et d'acide phosphorique, donc en milieu non oxydant ne permettant pas la distillation d'anhydrides métalliques: *b*. par précipitation, dans l'uranium irradié, de l'uranate de sodium par la soude, puis dans le filtrat, précipitation de S^2Pt en milieu acide, ces deux opérations éliminant tous les éléments à hydroxydes ou sulfures insolubles.

Le bromure d'argent précipité dans le distillat de l'opération *a*, aussi bien que dans le filtrat de l'opération *b*, montre une activité analogue à celle signalée précédemment ([1]) (distillation du brome).

2° En vue de préciser la nature de cet halogène, nous avons effectué des précipitations fractionnées de bromure d'argent : s'il se formait de l'iodure d'argent, celui-ci se concentrerait fortement dans les premières portions précipitées. Or l'activité semble se répartir uniformément dans les diverses fractions, ce qui montrerait que cette activité appartient à un isotope du brome plutôt que de l'iode.

CHIMIE PHYSIQUE. — *La viscosité des sols de sulfure d'arsenic et la formule d'Einstein*. Note ([1]) de M. **Augustin Boutaric** et Mlle **Suzanne Thévenet**, présentée par M. Jean Perrin.

1. D'après une formule d'Einstein, si η est la viscosité d'une suspension peu concentrée de granules rigides et sphériques, η_0 la viscosité du milieu de dispersion à la même température, c la concentration de la suspension en grammes par unité de volume et δ la masse spécifique de la matière constituant les particules, le rapport

$$k = \frac{\eta - \eta_0}{\eta_0} \frac{\delta}{c}$$

est égal à 2,5.

Ayant constaté antérieurement ([2]) que la viscosité d'un sol de S^3As^2

([1]) Séance du 13 février 1939.

([2]) A. Boutaric et S. Thévenet, *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 862.

diminue progressivement au cours de l'évolution spontanée qu'éprouve le sol abandonné à lui-même, il nous a paru intéressant d'étudier, sur des sols dont l'évolution est plus ou moins avancée, comment varie le quotient k.

La densité δ peut être calculée à l'aide de la méthode qui a servi à J. Perrin ([3]) pour déterminer la densité des granules d'une suspension, connaissant la densité de la suspension et la concentration des granules. Les valeurs ainsi obtenues pour le sulfure d'arsenic vont en croissant légèrement lorsqu'on considère des sols de plus en plus évolués, de $\delta = 2,81$, pour une solution fraîchement préparée, à $\delta = 3,02$ pour un sol conservé pendant un an à une température moyenne de 10° (la détermination de la densité d'un sulfure d'arsenic cristallisé fournit $\delta = 3,45$). Dans chaque expérience nous avons utilisé la valeur de δ déterminée sur le sol lui-même.

2. A partir de trois sols initiaux de concentration c, conservés à 0°, nous avons préparé, avec de l'eau distillée, des sols de plus en plus dilués; les valeurs de k relatives aux dilutions de ces trois sols sont :

Age.	δ.	c.	1.	0,9.	0,75.	0,65.	0,50.	0,40.	0,30 ([a])
5 jours.......	2,81	0,05755	22,2	19,6	21,4	21,7	23,7	24,6	23,7
34 »	2,86	0,0479	15,0	13,4	14,7	15,1	15,8	15,3	16,9
34 »	2,97	0,047	7,01	6,8	7,3	7,0	7,2	6,7	6,5

([a]) Les chiffres de 1 à 0,30 indiquent la fraction de la concentration c correspondant aux diverses dilutions.

Pour chaque échantillon le quotient k garde une valeur approximativement constante lorsqu'on dilue le sol avec de l'eau distillée. Mais la valeur de ce quotient varie beaucoup avec la nature de l'échantillon utilisé et notamment avec la manière dont la préparation a été conduite (en particulier avec la durée de passage du courant gazeux nécessaire pour éliminer l'excès de SH^2 ainsi qu'avec la nature du gaz utilisé pour cette opération).

3. Ayant préparé deux sols de S^3As^2, l'un B_1 à grains fins (par l'action rapide d'un courant de SH^2 dans une solution de O^3As^2), l'autre B_2 à gros grains (par action lente de SH^2), nous avons obtenu pour ces deux sols, conservés à diverses températures pendant des temps croissants θ, les valeurs suivantes de k :

([3]) *Annales de Chimie et de Physique*, 18, 1909, p. 38.

θ.	Sol B_1. 0°.	10°.	33°.	70°.	Sol B_2. 0°.	10°.	33°.	70°.
0 jour....	9,04	9,04	9,04	9,04	6,78	6,78	6,78	6,78
1 »	–	–	7,47	5,76	–	–	5,93	4,87
2 jours...	8,47	7,62	–	4,09	6,43	6,33	–	4,23
7 » ...	8,28	6,52	5,19	2,66	6,23	5,83	4,87	3,12
10 » ...	–	–	–	2,47	–	–	–	3,06
21 » ...	7,14	5,52	3,81	–	5,83	5,78	4,02	–
62 » ...	5,52	4,6	3,2		5,48	4,5	2,7	
87 » ...	5,33	4,23	–		5,43	4,07		

k va en diminuant à mesure que se poursuit l'évolution du sol et tend vers une valeur peu différente de la valeur théorique d'Einstein.

Ces résultats semblent indiquer que l'évolution spontanée, dont est le siège un sol de S^3As^2, a pour effet de diminuer le volume total occupé par les granules et sans doute aussi d'atténuer la dissymétrie de forme et de structure de ces granules.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Séparation des oses par chromatographie de leurs esters colorés.* Note de M. **Watroslav S. Reich**, présentée par M. Maurice Javillier.

La séparation des oses et des polyoses d'un mélange et leur identification n'a pas été encore résolue de façon satisfaisante. La méthode de cristallisation fractionnée appliquée à un tel mélange, directement ou en passant par les esters, permet bien parfois d'en extraire, avec un rendement plus ou moins bon, des substances plus ou moins pures, mais la difficulté s'accroît rapidement avec le nombre des composants ou par la présence d'oses de constitutions voisines. D'autre part, les méthodes d'identification par les éthers méthyliques, de l'école de Haworth, ne conviennent pas lorsqu'on est en présence d'un mélange d'éthers de polyoses, qui ne sont pas distillables et qui ont des solubilités voisines.

Afin d'essayer de résoudre ce problème, je me suis proposé d'appliquer la méthode chromatographique aux esters colorés dont j'ai donné le mode de préparation [1]. En effet, ces esters colorés sont absorbés sélectivement, dans des conditions données, par certains adsorbants, notamment l'alumine et la silice. La séparation d'un mélange des azoyl-esters du glucose et du fructose par exemple peut être effectuée comme il suit.

---

[1] *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 589.

Préparation de l'oxyde d'aluminium servant comme adsorbant. — *L'oxyde d'aluminium activé* de Merck est mis en suspension dans l'alcool méthylique et la suspension est abandonnée à 37° pendant 3 jours. La partie solide est séparée par filtration et séchée à l'air.

A l'aide de cette substance, la colonne d'adsorption est faite ainsi : on met la matière en suspension dans un mélange benzène-éther de pétrole (Éb. 60-80°) à volumes égaux. On verse le mélange dans un tube de 30^{cm} de longueur et de 20^{mm} de diamètre muni au fond d'une plaque poreuse, et l'on filtre le tout en s'aidant d'une pression de 20^{cm} de mercure. La colonne, qui ne doit jamais devenir sèche, est dans ces conditions de 20^{cm}.

Adsorption des azoyl-esters. — Lorsque le liquide surmontant la colonne a une hauteur de 5^{mm} environ, on ajoute une solution des azoyl-esters ainsi composée : 30^{cm^3} de $CHCl^3 + 0^g,15$ d'ester de fructose $+ 0^g,15$ d'ester de glucose $+ 30^{cm^3}$ de benzène $+ 30^{cm^3}$ d'éther de pétrole, et l'on filtre lentement sous pression. Dans le haut de la colonne on observe une bande rouge nettement séparée au milieu par une zone plus claire.

On fait passer alors lentement sous pression d'azote à travers la colonne 200^{cm^3} d'un mélange benzène-éther de pétrole à parties égales. Les deux couches se séparent nettement par une bande incolore. On laisse la pression jusqu'à ce que tout le liquide soit écoulé.

Les deux bandes colorées sont séparées mécaniquement et l'élution se fait par un mélange de chloroforme (90 pour 100) et alcool méthylique (10 pour 100).

Le solvant évaporé après filtration sous pression réduite laisse les azoyl-esters qui, recristallisés, montrent que la couche supérieure est constituée par le β-pentaazoyl-*d*-fructopyranose [P. F. 135-136°; $[\alpha]_{6439}^{20} = -340°$ (chloroforme, conc. 1 pour 100)], et la couche inférieure par l'α-penta-azoyl-*d*-glucopyranose [P. F. 234-236°; $[\alpha]_{6439}^{20} = +197°$ (chloroforme, conc. 1 pour 100)].

En se servant d'une colonne de silice pure précipitée B. D. H., préparée par suspension dans 10 pour 100 de benzène + 90 pour 100 d'éther de pétrole, et en développant le chromatogramme avec un mélange de benzène 25 pour 100 + éther de pétrole 75 pour 100, on obtient des résultats analogues.

Si la colonne est plus étroite (7^{mm} de diamètre) et moins haute (15^{cm}), on peut facilement effectuer la séparation de 10^{mg} de l'ester de glucose et de 10^{mg} de l'ester de fructose, ce qui correspond à environ $1^{mg},5$ de chaque ose.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la cryoscopie de l'acide molybdique en solution aqueuse.* Note de MM. **Eugène Darmois**, **Yves Doucet** et de M[lle] **Marcelle Murgier**, présentée par M. Charles Mauguin.

A l'aide de l'appareillage décrit par l'un de nous ([1]), nous avons étudié la cryoscopie des solutions aqueuses de l'acide molybdique. L'acide a été obtenu par le procédé signalé récemment ([2]). L'étalonnage du couple a permis d'établir entre la f. e. m. e de celui-ci et la différence de température θ la relation $\theta = 211\,e$ (microdegrés, microvolts). Les concentrations des prises ont été déterminées pour $m < 0,02$, avec l'interféromètre de Rayleigh-Zeiss. La courbe d'étalonnage de cet instrument est établie à l'aide de solutions diluées par pesées, dérivant d'une solution mère décinormale établie par titrimétrie. Pour les concentrations $m > 0,02$, on effectue le dosage par titrimétrie sur 100^{cm^3} de solution à l'aide d'une solution décinormale de soude. Dans le tableau qui suit, m désigne la molarité des solutions en Mo. θ est l'abaissement cryoscopique. La discussion des erreurs montre que, pour $m = 0,2$, on a $\theta/m = 0,274 \pm 0,002$ et pour $m = 0,002$, $\theta/m = 1,18 \pm 0,05$.

m.	$\sqrt{m}$.	θ.	θ/m.	θm.	$\sqrt{m}$.	θ.	θ/m.
0,0022	0,0469	0,00258	1,18	0,0405	0,201	0,01986	0,490
0,0034	0,0583	0,00385	1,14	0,0457	0,213	0,02117	0,463
0,0038	0,0616	0,00417	1,10	0,0533	0,233	0,02387	0,448
0,00523	0,0724	0,00549	1,05	0,0678	0,260	0,02597	0,383
0,00604	0,0777	0,00621	1,03	0,0801	0,284	0,02937	0,366
0,00867	0,0930	0,00829	0,96	0,0907	0,301	0,03222	0,355
0,01050	0,1025	0,00972	0,925	0,1400	0,374	0,04033	0,288
0,0122	0,1105	0,01078	0,883	0,1805	0,425	0,05222	0,289
0,0222	0,149	0,01593	0,717	0,2090	0,457	0,05727	0,274
0,3800	0,195	0,02048	0,539				

Pour les valeurs de $\sqrt{m}$ inférieures à 0,15, la courbe des θ/m en fonction de $\sqrt{m}$ est une droite, aux erreurs près. On peut donc extrapoler facilement la valeur à l'origine; on trouve ainsi $(\theta/m)_0 = 1,39$. Comme la constante cryoscopique de l'eau est 1,858, le nombre 1,39 représente les 3/4 de la constante cryoscopique. Ce qui signifie que la molécule renferme 4 Mo et

([1]) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 577.
([2]) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 583.

qu'elle se dissocie en 3 ions. L'acide aurait donc en solution étendue la formule $Mo^4O^{13}H^2$ et donnerait 1 ion Mo^4O^{13--} et 2 ions H^+.

Dans le but de voir si l'acide est dans ces conditions un électrolyte fort, nous avons calculé le coefficient d'activité, à la façon de Lewis. Nous donnerons seulement la valeur pour la concentration la plus faible. Pour cette concentration, le nombre j de Lewis est $j = 1 - 1,18/1,39 = 0,078$; on sait que, dans ces conditions, si f est le coefficient d'activité, on a $\log f = -3j:2,3 = -0,10$. D'autre part la formule de Debye et Hückel donne $\log f = -0,5\, z_1 z_2 \sqrt{\mu}$ où z_1 et z_2 sont les valences des ions et μ la force ionique de la solution. Cette formule donne $\log f = -0,04$. Le coefficient réel est donc beaucoup plus petit que le coefficient théorique, l'acide est donc un électrolyte moyennement fort.

Pour étayer ce dernier résultat, nous avons effectué la cryoscopie d'un électrolyte du même type que notre acide, à savoir SO^4K^2. Nous donnerons les résultats relatifs à la molarité 0,00114 en sulfate. On a alors $\theta/m = 5,38$; la valeur pour $m = 0$ est 5,58. Le même calcul donne $\log f$ réel $= -0,11$ et $\log f$ théorique $= -0,13$, ce qui confirme que SO^4K^2 est beaucoup plus près d'un électrolyte fort que l'acide molybdique.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Les bandes rouges du cyanogène dans le spectre du ciel nocturne.* Note [1] de M. **Georges Déjardin**, présentée par M. Charles Fabry.

Dans la région des longueurs d'onde supérieures à 5000 Å, les principales observations du spectre du ciel nocturne sont celles de Sommer [2] et de Cabannes [3]. Elles sont suffisamment précises et concordantes pour qu'on puisse, indépendamment des raies OI et des raies D du sodium, affirmer la réalité des principales radiations décelées sur les spectrogrammes et considérer comme très vraisemblables les attributions proposées : premier système positif de l'azote, bandes d'émission de la vapeur d'eau et de l'oxygène.

Ayant étudié récemment [4] la décharge lumineuse dans l'azote en

(1) Séance du 27 février 1939.

(2) *Zeitschrift für Physik*, 77, 1932, p. 374.

(3) *Journal de Physique*, 7e série, 5, 1934, p. 601.

(4) *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 510.

présence de chlorure de sodium, j'ai obtenu, pour un certain régime, un rayonnement dont la composition spectrale présente, entre 5000 et 6600 Å, d'assez grandes analogies avec celle de la lumière du ciel nocturne. La ressemblance s'accuse lorsqu'on diminue systématiquement la netteté des clichés, soit en élargissant la fente du spectrographe, soit en déréglant légèrement l'instrument, de manière à se rapprocher des conditions réalisées avec une faible dispersion. L'enregistrement des spectrogrammes au microphotomètre permet alors de distinguer les maxima principaux suivants, qui traduisent l'existence de groupes de radiations voisines et non séparées :

Å 5250	5360	5480	5610	5740	5860	5890	6000
6060	6150	6210	6300	6350	6470	6510	6590.

En se reportant aux listes de Sommer et de Cabannes, on constate que ces maxima correspondent tous, à l'exception de 6150 Å, à des radiations relativement intenses du ciel. Or le spectre obtenu au laboratoire résulte essentiellement de la superposition de deux systèmes de bandes dont les intensités sont du même ordre : les bandes rouges de CN et celles du premier système positif de l'azote. On est ainsi conduit à rechercher systématiquement, dans le spectre du ciel nocture, la présence des bandes rouges de CN.

Les bandes violettes et ultraviolettes de CN ($^2\Sigma \rightarrow {}^2\Sigma$) ont déjà été reconnues [5] parmi les radiations du ciel observées par Cabannes, Dufay et Gauzit. On peut donc s'attendre à retrouver aussi les bandes rouges $^2\Pi \rightarrow {}^2\Sigma$, qui correspondent à une énergie d'excitation plus faible (1,35 eV, au lieu de 3,18 eV pour les bandes violettes) et dont l'apparition est d'ailleurs facilitée sous l'influence de l'azote actif [6]. Or, on sait que les couches luminescentes de la haute atmosphère contiennent certainement une proportion notable de molécules d'azote métastables $A\,^3\Sigma$.

Le tableau ci-contre permet la comparaison entre les principales bandes rouges de CN et certaines radiations décelées dans le spectre du ciel nocturne, d'après les déterminations de Cabannes, Dufay et Sommer. Dans la première colonne, la seconde longueur d'onde indiquée est celle de la tête la plus intense; les nombres des colonnes suivantes représentent

---

(5) J. Kaplan, *Physical Review*, 52, 1937, p. 1252; J. Cabannes, J. Dufay et J. Gauzit, *Nature*, 142, 1938, p. 755.

(6) Lord Rayleigh et A. Fowler, *Proc. Roy. Soc. London*, A, 86, 1912, p. 105.

les intensités relatives notées par Fowler et Shaw [7] dans la flamme du cyanogène ou en présence d'azote actif. Dans la dernière partie du tableau sont mentionnées certaines radiations qui, dans la lumière du ciel, sont susceptibles de déplacer les maxima observés, en masquant plus ou moins complètement les bandes du cyanogène.

CN.	Fl.	N act.	Ciel nocturne.				
4683-4691-4695...	–	2	4693 (3) C. D. [8]				
4833-4842-4846...	1	4	4838 (4) C. D. [8]			N_2(V. K.),	4838
5240-5251-5255...	2	5	5253 (3) C.				
5355-5366-5371...	2	6	5360 (2) S.				
5474-5485-5491...	2	5	5475 (0) C.,	5477 (2) S.		H_2O, ξ,	5420-5480
5599-5611-5616...	3	4	5620 (1) S.,	5610 (1) C. [9]			
5607-5619-5626...	–	2					
5729-5742-5748...	–	1	5739 (2) C.,	5735 (0) C. [9]			
5731-5743-5749...	5	7					
5859-5872-5878...	2	9	5861 (5) C.,	5857 (1) S.		N_2(IP),	5853
5993-6007-6013...	2	6	5991 (3) C.,	5992 (3) S.,	6001 (2) C. [9]	H_2O, D,	5850-6000
6192-6207-6214...	6	1	6200 (2) C.,	6207 (2) S.			
6333-6348-6355...	10	6	6349 (3) C.			O I,	6363
6479-6495-6503...	9	10	6468 (4) C.,	6479 (4) S.		N_2(IP),	6467
						H_2O, C,	6430-6600
6793-6810-6818...	1	3	6802 (2) C.				
7091-7110-7119...	–	–	7096 (2) C.				

Les rapprochements précédents ne permettent évidemment pas d'affirmer, sans aucune réserve, la présence des bandes rouges du cyanogène dans la luminescence de la haute atmosphère. Dans l'attente de nouvelles déterminations, cette hypothèse vient s'ajouter, sans aucune contradiction, à celles déjà envisagées par Sommer et Cabannes; elle permet d'interpréter plus complètement l'ensemble des observations relatives à la région des grandes longueurs d'onde du spectre du ciel nocturne.

---

(7) *Proc. Roy. Soc. London*, A, **86**, 1912, p. 118.
(8) J. Cabannes et J. Dufay, *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 306.
(9) J. Cabannes, *Comptes rendus*, **200**, 1935, p. 1905.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Remarques sur les variations de la couleur du ciel nocturne.* Note [1] de M. **Raymond Grandmontagne**, présentée par M. Charles Fabry.

Au cours de l'année 1938, le photomètre enregistreur à cellule photoélectrique que j'utilise à l'Observatoire de Lyon m'a permis non seulement d'étudier les variations de la lumière globale du ciel nocturne [2], mais encore de remarquer que la composition de la lumière rouge ne restait pas fixe.

Pour exposer ce résultat, je rappellerai que les filtres colorés qui interviennent aujourd'hui sont uniquement les filtres rouges OG 2, RG 5 et RG 8. Les mesures portent ainsi sur trois régions spectrales limitées du côté des grandes longueurs d'onde par la sensibilité de la cellule (vers 9000 Å) et du côté des petites longueurs d'onde par la transmission des trois filtres. D'après mes plus récentes déterminations, ces filtres transmettent plus de 50 pour 100 de la lumière incidente à partir de 5850, 6800 et 7250 Å respectivement. J'obtiens par différence les intensités correspondant aux régions spectrales 6800-7250 Å et 5850-6800 Å et, pour avoir une indication sur la composition de la lumière rouge, je forme les rapports entre les intensités trouvées pour ces deux régions et celle de la lumière transmise par le filtre OG 2 (au-dessus de 5850 Å) considérée comme lumière globale.

Région 6800-7250 Å. — Toutes les fois que les deux filtres RG 5 et RG 8 ont été employés simultanément, la différence des déviations obtenues avec chacun d'eux est restée de l'ordre de grandeur des erreurs de mesure. Ce résultat est en accord avec la répartition précédemment trouvée [3]. Il m'a servi en outre à rapprocher les observations où les filtres RG 5 et RG 8 n'ont pas été employés simultanément : j'ai considéré comme négligeable la différence entre les indications obtenues avec ces deux filtres.

Région 5850-6800 Å. — Cette région a été régulièrement étudiée depuis le mois d'août 1937 jusqu'au mois de juin 1938; à partir de février 1938,

---

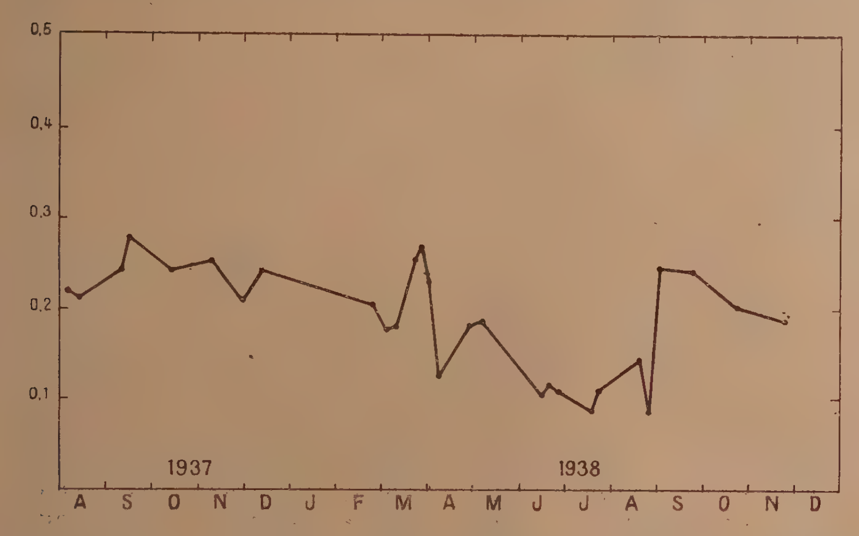
(1) Séance du 20 février 1939.

(2) *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 321.

(3) *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 375.

j'ai étudié la région 5850-7250 Å. Pendant les mois de février à juin on a constaté que l'intervalle 6800-7250 Å n'intervenait pratiquement pas.

Le graphique ci-dessous représente l'ensemble des observations relatives



Légende. — En abscisses, les dates; en ordonnées, les rapports des déviations du photomètre pour les bandes 5850-6800 Å et 5850-9000 Å donnant la proportion de rouge proche dans le rouge total étudié. Chaque point représente la moyenne des indications d'une seule nuit; l'irrégularité de distribution des points dans le temps provient de la fréquence irrégulière des nuits acceptables pour ces mesures.

à la région 5850-6800 Å. Il montre que l'émission au début du rouge a été particulièrement faible au milieu de l'année, de mars à août.

Garrigue a publié les résultats d'observations très discontinues sur la variation de la raie 6300 Å, qui paraît plus intense en hiver qu'en été ([4]). En rapprochant cette observation des remarques ci-dessus, on est conduit à penser que la raie 6300 Å joue un rôle considérable dans toute l'émission du ciel nocturne comprise entre 5850 et 7250 Å.

([4]) Hubert Garrigue, *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 491.

HYDROLOGIE. — *Analyse des composantes de l'Euphrate en Syrie.* Note de M. **Soubhi Mazloum**, présentée par M. Georges Perrier.

Les niveaux de l'Euphrate en Syrie ont été observés depuis 1925 et 1927, aux échelles de Djérablous et de Deir-ez-Zor; le régime de leurs variations saisonnières est du type nivo-pluvial.

L'analyse harmonique de ces niveaux par la méthode de M. H. Labrouste permet d'en dégager les composantes élémentaires et d'apprécier l'importance des composantes supérieures.

	Composantes (T, en mois).	Djérablous. Amplit. maxim.	Djérablous. Import. i.	Deir-ez-Zor. Amplit. maxim.	Deir-ez-Zor. Import. i'.	Écart de phase.	Rapport $\frac{i}{i'}$
		m	%	m	%	%	
Niveaux de l'Euphrate	3	0,52	9,4	0,44	9,6	12,8	0,98
	4	0,85	15,3	0,85	18,3	2,2	0,83
	6	1,47	26,5	1,41	30,3	1,6	0,87
	12	2,15	38,7	2,17	46,6	0,5	0,83
	21,5	1,12	20,2	1,10	23,6	16,8	0,86
	30	1,00	18	1,12	24	–	0,75
	Comp. sup.	0,93	16,8	1,27	27,1	–	0,62
Pluie........	12	59mm	44,7	31mm	23	–3,3	1,94
Température..	12	25°,2	90,7	25°,4	88,2	0,5	1,03

Les différentes composantes dégagées répondent aux caractères généraux reconnus [1] : leur comparaison appelle cependant quelques observations.

Similitude et progression des composantes. — Les composantes homologues forment des trains d'ondes semblables, et leurs amplitudes maxima varient peu entre les deux stations. Leur importance relative croît d'amont en aval; leurs phases, légèrement variables autour d'une valeur moyenne, croissent d'aval en amont, ce qui indique une progression des composantes dans le sens du courant (régime katoplymirique), en rapport avec la physiographie connue du bassin de l'Euphrate, les apports du Sadjour et du Baligh altérant peu son régime défini par le bassin supérieur situé en Turquie. Cette caractéristique a permis d'instaurer une prévision régulière de la transmission des niveaux sur le cours syrien et d'y organiser efficacement la défense contre les inondations.

---

(1) V. Frolow, *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 2206.

Niveaux Moyens Mensuels

Echelle de Djérablous

Echelle de Deir-ez-Zor

T: 3 mois

T: 4 mois

T: 6 mois

T: 12 mois

T: 21,5 mois

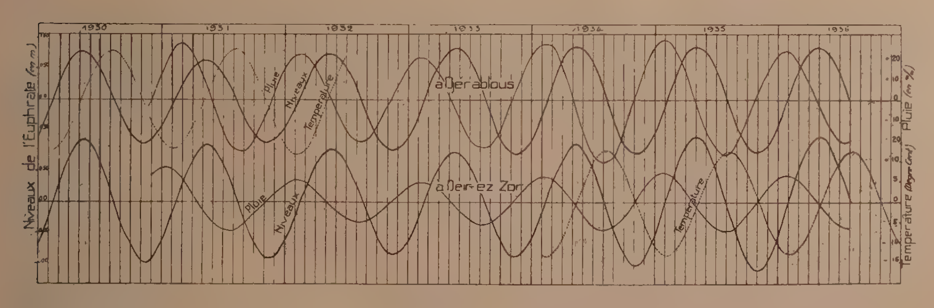
T: 30 mois

Reste

Djérablous

Deir-ez-Zor

Analyse des composantes de l'Euphrate à Djérablous et Deir-ez-Zor.



Comparaison des composantes annuelles de l'Euphrate avec celles de la pluie et de la température.

Comparaison avec les composantes annuelles de la pluie et de la température. — Cette comparaison révèle un signe distinctif du régime nivo-pluvial : les niveaux sont en quadrature avec les pluies et la température, ces dernières étant en opposition de phase entre elles. Le retard sur la pluie est dû à l'enneigement et à l'infiltration; l'avance sur la température résulte de la fonte rapide des neiges avec les premières chaleurs du printemps.

La progression de la composante annuelle se fait d'amont en aval, pour les niveaux et la température, et avec une vitesse sensiblement égale (250^{km} par jour environ); celle de la pluie se fait en sens contraire et avec une vitesse six fois plus petite.

Limites du régime. — La grande crue observée en 1929 a résulté de la superposition des amplitudes maxima des composantes dégagées avec un maximum des composantes supérieures : avec la coïncidence de l'élongation maximum des composantes courtes, la crue peut atteindre 7^m à Djérablous et 5^m à Deir-ez-Zor (débit correspondant à 5500 m^3/s environ). De même, l'étiage peut descendre à $0^m,45$ à Djérablous et $-0^m,75$ à Deir-ez-Zor (débit correspondant, 90 m^3/s environ), avec l'interférence des élongations minima de toutes les composantes. Cette limite inférieure de l'étiage restreint le pouvoir d'irrigation de l'Euphrate et conduit à prévoir, à l'avenir, un emmagasinement des crues pour régulariser les débits.

OCÉANOGRAPHIE. — *Sur l'origine des vasières de la Seine maritime.* Note de M. **Jacques Bourcart**.

On sait que, dans toute la partie de leur cours terminal, les rivières des mers à marées déposent une très grande quantité de vase qui, notamment, comble certains ports latéraux comme celui de Honfleur.

Il semble que, jusqu'ici, le mécanisme de ce phénomène n'ait été interprété que par des théories empruntées à des expériences de laboratoire.

J'ai cherché à voir, sur la Seine maritime, le phénomène en action. Il est très facile à étudier, à marée descendante, le long d'une banquette bordant la digue de Tancarville.

La Seine, au moment de l'observation, charriait de gros flocons de 1 à 2^{cm} de grand axe, très ténus de structure, d'une densité voisine de celle de l'eau. Quand la hauteur d'eau au-dessus de la banquette n'était que de quelques centimètres, les flocons adhéraient alors à son revêtement de pierre, s'agglomérant les uns aux autres pour constituer une vase assez

résistante pour être modelée en rides par les ondulations dirigées vers le rivage.

Les flocons capturés se présentent de la façon suivante :

Ils sont constitués par des agrégats en treillis, à mailles polygonales dont les nœuds sont faits de grains de craie, de foraminifères de la craie, de grains de glauconie et surtout de quartz, les uns et les autres d'une dimension maxima de $0^{mm},05$. De très fins granules de calcite, à peine discernables au microscope, constituent les mailles.

Une série de débris plus légers que l'eau, ou chargés d'air, adhèrent au flocon ou sont pris dans les mailles : ce sont des fragments, de toutes dimensions, de particules végétales reconnaissables ou réduites en granules, le plus souvent teintes par du fer, des grains de pollen, des carapaces d'ostracodes, de copépodes, des embryons de gastéropodes, de très nombreuses diatomées avec leur matière brune plus ou moins conservée, ou pleines d'air, des spicules d'éponges (mégasclères ou microsclères de monactinellides ou de tétractinellides), les uns et les autres en opale, avec leurs canaux pleins d'air, quelques fragments d'algues vertes et de rares foraminifères marins actuels. En outre, il faut signaler des rhomboèdres parfaits de calcite.

M. Rajčević, a recueilli dans la région de Rouen, à quelques mètres de la rive, des flocons beaucoup plus petits (2^{mm} en moyenne). Leur constitution est analogue, avec beaucoup plus de matière organique seulement. Infusoires et bactéries vivantes y pullulent.

D'autre part l'examen de la vase déposée sur la banquette de Tancarville m'a montré que les flocons y ont conservé leur structure à ceci près qu'ils sont aplatis.

La vase qui s'accumule, à marée descendante, sur la plage de Honfleur, celle qui encombre le port de cette ville, celle qui apparaît à marée basse à Villerville, celle de l'Orne, à 2^{km} en aval de Caen, offrent toutes la même structure et la même composition, aux espèces de diatomées près. Il en est de même de celle que M. Claude Francis-Bœuf a rapportée de l'Aulne; mais alors elle n'est plus essentiellement faite de calcaire comme celle de la Seine qui en contient 40 pour 100 en moyenne.

La formation des flocons résulte, selon moi, de la pseudo-attraction capillaire (¹) qui fait que toutes les particules mouillées par l'eau se réunissent et finissent, pourvu que l'eau soit suffisamment calme ou la

(¹) Chwolson, *Traité de Physique*, 1, fasc. 3, p. 620.

tranche d'eau suffisamment mince, par adhérer à toutes les parois. L'uniformité de composition de tous les flocons et toutes les vases latérales et de celles observées en voie de sédimentation montre bien que ces vases proviennent toutes de l'agrégation de flocons. Il faut aussi remarquer que des flocons fluviatiles sont transportés très loin de l'embouchure de la Seine. Certains se fixent sur la côte, mais d'autres sont forcément entraînés au large, où leur destinée devient très différente.

Il n'est nullement dans mes intentions de nier que les colloïdes organiques et minéraux jouent un rôle dans la formation ou surtout dans la cohérence des flocons, mais les travaux de M. Rajčević ([2]) ont montré que la théorie classique, qui veut que les flocons soient le résultat de la coagulation de la charge colloïdale des rivières par le chlorure de sodium, est inadéquate; jusqu'à Tancarville, en effet, l'eau de l'estuaire est pratiquement douce et, au port de Honfleur, la salinité à basse mer ne dépasse pas 5 pour 1000.

Quant à la formation des vasières des berges, elle est donc due à un phénomène totalement différent de ce que l'on appelle communément une sédimentation, c'est-à-dire un dépôt sous l'effet de la gravité.

OCÉANOGRAPHIE. — *Sur la salinité des eaux de la Seine, entre Amfreville et Honfleur.* Note ([1]) de M. **Bogdan Rajčević**.

On a, en général, tendance à considérer que l'influence de la mer s'étend sur la Seine jusqu'à Rouen. C'est dans le but essentiel de préciser cette notion que j'ai prélevé des échantillons d'eau de surface en des points caractéristiques, en juillet 1938, et quelques échantillons de contrôle en février 1939.

Les effets de la marée, tels que la variation du niveau des eaux, se font sentir jusqu'au barrage de Martot. Mais ce phénomène est particulièrement net quand la Seine est en étiage et le coefficient de marée fort : dans un tel cas la variation de niveau peut atteindre environ $1^m,50$.

La méthode de Knudsen a été utilisée pour mesurer la salinité. Elle consiste à déterminer l'ion chlore contenu dans un échantillon donné. La

---

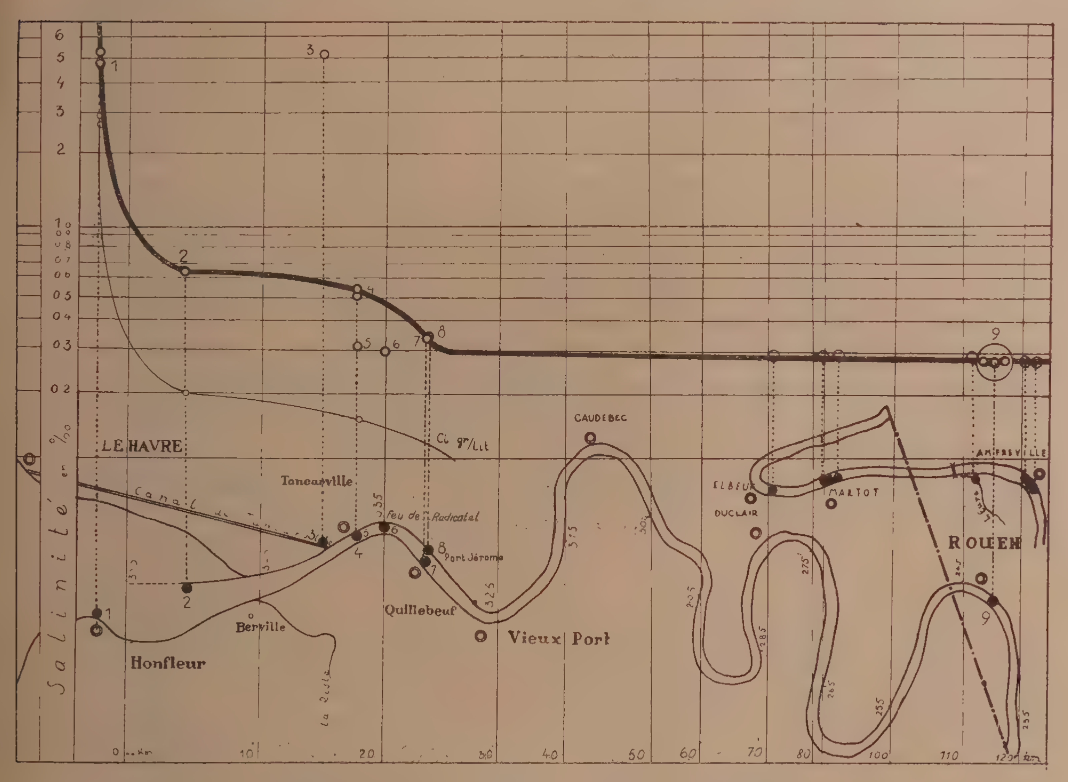
([2]) Voir ci-dessous la Note de M. B. Rajčević.

([1]) Séance du 27 février 1939.

salinité est donnée par la formule

$$S(\text{salinité}) = 0,030 + 1,8050\,Cl \text{ pour } 1000.$$

La quantité de chlore contenu est obtenue par un dosage au nitrate d'argent en présence d'un indicateur (bichromate de potassium). La solution au nitrate d'argent utilisée a été titrée de telle sorte que 1^{cm^3} de $AgNO^3$ précipite 1^{mgr} de chlore. Les corrections ultérieures sont faites d'après les tables de Knudsen.



Courbe de la salinité maximum de la Seine fluvio-maritime.

J'ai ainsi obtenu un certain nombre de résultats qui peuvent être représentés graphiquement. La salinité a été portée en ordonnée, à l'échelle logarithmique, tandis que les abscisses représentent les distances comptées le long du fleuve.

La courbe obtenue peut conduire à certaines conclusions :

1° La limite de la pénétration des eaux de mer peut être située entre Quillebœuf et le Vieux Port. C'est en somme la zone extrême où l'on peut encore parler de l'influence directe des eaux marines.

2° En amont du Vieux Port, l'eau de la Seine doit être considérée comme douce (0,026 à 0,032 de Cl pour 1000). De l'eau essentiellement douce prise à Meulan et à Mantes indiquait une teneur de 0,011 à 0,024 pour 1000.

3° Entre Quillebœuf et l'extrémité de la rive droite, la salinité croît faiblement, mais d'une manière régulière de 0,36 à 0,62 pour 1000.

4° Enfin, dans l'estuaire proprement dit, la salinité croît de 0,62 pour 1000 (extrémité de la digue) à 5 pour 1000 environ (4,93 et 5,28 pour 1000) au fond du port de Honfleur, et à 12 pour 1000 en port ouvert de Honfleur.

Notre courbe précise que, dans le phénomène de la propagation de la marée, il faut distinguer la pénétration de l'eau de mer de l'accumulation de l'eau douce en amont.

La première se fait sur un parcours limité, tandis que l'accumulation des eaux de la Seine intéresse une étendue sensiblement plus grande.

Des mesures en plus grand nombre et en rapport avec la variation quotidienne de la marée sont en cours afin d'élucider si l'existence des vases est liée ou non à la floculation des colloïdes en aval de Tancarville, et si ce phénomène est déterminé par les électrolytes de l'eau de mer.

OCÉANOGRAPHIE. — *Sur les variations de salinité, au cours d'une journée de septembre, des eaux de l'Aulne maritime à Trégarvan*. Note ([1]) de M. **Claude Francis-Bœuf**.

A environ 8^{km} de la rade de Brest (Landévénec), à Trégarvan, l'estuaire maritime de l'Aulne fait un coude très prononcé. Au mois de septembre 1938, j'ai effectué une série de mesures de salinité des eaux de l'Aulne afin de déterminer les variations qu'elles subissent au cours de la propagation du flot de marée.

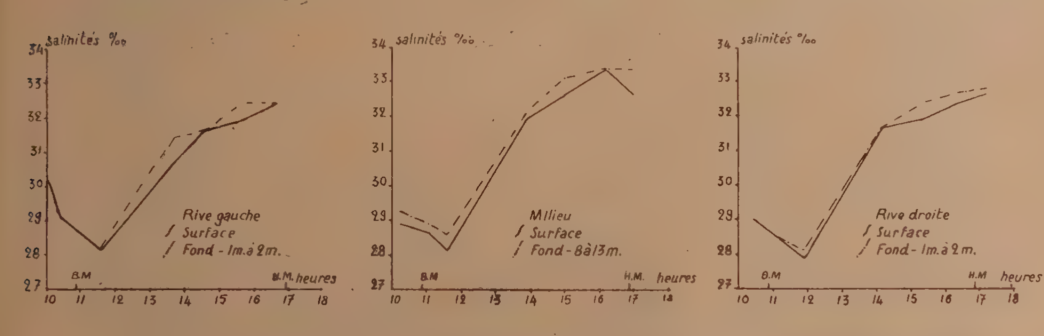
Toutes les heures, près de la rive droite, au milieu, et près de la rive gauche, en surface comme au fond, un échantillon d'eau a été recueilli.

([1]) Séance du 27 février 1939.

Les prélèvements ont commencé un peu avant l'étale de basse mer, et ont été poursuivis jusqu'à la haute mer suivante.

La salinité a été déduite de mesures densimétriques, après correction de température ([2]).

Il a été possible de tracer trois graphiques. Leur examen conduit à faire certaines remarques :



1° Le long des rives, comme au milieu de la rivière, la salinité croît avec la marée; mais les courbes indiquent un ralentissement très net environ 3 heures avant la fin du flot.

2° La différence entre la salinité des eaux de fond et des eaux de surface n'est pas très forte. Il arrive même que le long des rives elle soit rigoureusement identique.

3° Le minimum de salinité ne s'observe pas à basse mer, mais environ 45 minutes après.

4° Le maximum ne correspond pas non plus à la haute mer, mais se produit environ 30 minutes avant.

5° La salinité est élevée sur les bords comme au milieu, mais son maximum s'observe cependant au milieu de la rivière, avec 33,40 pour 1000, identique pour les eaux de fond et celles de surface (c'est le seul point où ce phénomène se réalise).

Le minimum de salinité est également élevé : 28 pour 1000 est le minimum observé aux trois points de prélèvement.

On peut interpréter ainsi ces résultats :

1° Si le degré de salinité est constamment assez élevé, en été, c'est que l'apport d'eau douce est alors très faible (le débit de l'Aulne en

---

([2]) J. Thoulet, *Instruments et opérations d'Océanographie pratique*, Paris, 1908, p. 127-134.

septembre 1938 était insignifiant). Par contre, l'eau de mer (dont la salinité en rade de Brest atteignait 34,85 pour 1000) a, à cette époque, une influence prépondérante.

2° Le fait que le minimum de salinité est observé 45 minutes après l'étale de basse mer doit être attribué d'une part à un léger retard de la propagation du flot et d'autre part à une prolongation de l'influence du jusant.

3° La croissance rapide de la salinité s'explique par la force du courant de marée, qui est considérable pendant environ 3 heures. Après quoi il s'affaiblit nettement, et il s'ensuit une augmentation moins rapide de la salinité.

4° Le mélange des eaux le long des rives peut s'expliquer par une profondeur naturellement moins grande qu'au milieu, et par le jeu des contre-courants tourbillonnaires qui s'établissent et qui amènent un brassage très net des eaux ([3]).

On peut conclure en disant qu'en été le régime des eaux, au coude de Trégarvan, est presque totalement déterminé par la pénétration des eaux marines avec l'onde de marée.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur les conditions d'éclairement de quelques Algues vivant dans les grottes et anfractuosités littorales de la région malouine.* Note de M. **Robert Lami**, présentée par M. Pierre-Augustin Dangeard.

L'éclairement intense et l'asséchement, dû tant à la radiation solaire qu'à l'action du vent non saturé d'humidité, qui agissent librement aux niveaux supérieurs de la zone intercotidale d'une côte basse, nuisent au développement de certaines algues qui demeurent sciaphiles et hygrophiles pendant l'émersion (*Rhodocorton Rothii* Naeg., *Catenella Opuntia* Grev., *Hildenbrandia prototypus* Nardo, *Leptonema lucifugum* Kuck.). Il n'en demeure que de rares et pauvres peuplements dans les fentes ou sous les Fucacées résistantes.

Au contraire, ces espèces prospèrent sur les parties aspectées au nord des roches des côtes élevées et des parois des ouvrages d'art, là où la lumière solaire directe n'atteint jamais. Elles occupent des surfaces plus importantes encore sur les parois des grottes marines où l'éclairement est

([3]) *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 1014-1016.

fortement atténué et où l'état hygrométrique de l'air demeure toujours élevé. Dans ces dernières conditions, certaines espèces, *Rhodocorton Rothii* et *Leptonema lucifugum* en particulier, peuvent devenir sub-aériennes et ne sont humectées que par les embruns ou, plus rarement, par les éclaboussures des lames. Si la profondeur relative de la grotte est suffisante, on constate que ces espèces, d'abord peu abondantes, présentent ensuite un maximum de développement à une certaine profondeur, se raréfient, puis disparaissent plus loin. L'état hygrométrique de l'air, à peu près homogène, ne nous semble pas intervenir dans cette répartition, mais seulement la valeur de l'éclairement.

Nous avons cherché, en décembre dernier, à déterminer, dans quelques grottes marines des environs de Dinard, la valeur relative, exprimée en fraction de l'éclairement extérieur, des éclairements supportés par quelques espèces antricoles de la région.

Les mesures ont été effectuées, par ciel voilé, au moyen d'un Luxmètre *Prolabo* à cellule à couche d'arrêt. Avant et après chaque mesure de lumière localement atténuée, une mesure de l'éclairement extérieur général fut faite. Le rapport de ces mesures nous a donné des éclairements relatifs nécessaires ou suffisants à l'existence des espèces considérées.

	Maximum.	Optimum.	Minimum.
Rhodocorton Rothii..................	4/10	1/7	1/20
Catenella Opuntia..................	6/10	1/4	1/40
Leptonema lucifugum..................	2/10	–	1/20

On constate donc que, de ces trois espèces, le *Catenella* s'adapte le plus facilement à des éclairements variables et que le *Leptonema* présente, sous ce rapport, des besoins plus stricts, ce qui est peut-être une des raisons de la rareté de cette plante dans la région.

Accessoirement, nous avons noté que l'*Hildenbrandia prototypus* Nardo présente son optimum de développement pour un éclairement de 2/10 et que *Lithothamnium Lenormandi* (Aresch.) Fosl., espèce très euryphote supportant la lumière directe, pénètre dans les grottes jusqu'à un éclairement réduit à 1/20.

BIOLOGIE EXPÉRIMENTALE. — *Hypophysectomie et cycle sexuel chez la grenouille rousse* (Rana temporaria *L.*). Note de M. **Louis Gallien**, présentée par M. Maurice Caullery.

L'un des points que nous nous sommes attaché à résoudre dans l'étude que nous avons consacrée à la physiologie hypophysaire, chez *Rana temporaria*, est le suivant : quel rôle joue l'époque de l'opération dans l'inhibition du cycle sexuel et l'involution des gonades ?

On sait en effet que *R. temporaria* traverse, en cours d'année, deux périodes essentielles :

1° Une période d'*activité génitale* se déroulant de mars à septembre. La ponte a lieu en mars, les gonades subissent ensuite une involution puis, à partir de juin, une nouvelle série de produits génitaux se développe (spermatogénèse et spermiogénèse, vitellogénèse).

2° Une période *statique* correspondant à l'hibernation et qui se déroule d'octobre à mars. Fin septembre, la maturité sexuelle est atteinte et en octobre on peut expérimentalement obtenir l'accouplement et des pontes normales ([1]).

Nous rapportons ici les résultats essentiels de nos observations, réservant les détails des expériences pour un travail d'ensemble. Nous avons effectué deux séries d'opérations, chacune d'elles étant faite au début des périodes ci-dessus définies.

1° *Opérations de printemps*, 24 animaux, opérés en avril et mai, c'est-à-dire après la ponte. L'autopsie fut faite à la mi-septembre. La durée moyenne de l'expérience fut de 4 mois.

Nous avons observé, dans les deux sexes, une involution considérable des gonades ([2]); chez la femelle, l'ovaire et l'oviducte ont conservé l'aspect macroscopique qui s'observe après la ponte. Le développement du lot d'ovocytes qui normalement aurait dû subir la vitellogénèse a été totalement inhibé.

2° *Opérations d'automne*, 24 animaux opérés en novembre et décembre (6 nov. au 9 déc.), c'est-à-dire alors que la maturité génitale est atteinte.

([1]) L. Gallien, *C. R. Soc. Biol.*, 124, 1937, p. 874.

([2]) Voir, en ce qui concerne le sexe mâle, L. Gallien, *C. R. Soc. Biol.*, 129, 1938, p. 1043.

Un premier lot d'opérés fut sacrifié à la mi-février, donc une quinzaine de jours avant l'époque normale de la ponte. Tous les animaux présentaient cette peau sèche, desquamant mal, caractéristique des hypophyséoprives.

Or, à notre grande surprise, chez les individus opérés au début de décembre, ni les gonades ni le tractus génital, ne présentaient de signes d'atrésie. Après deux mois, l'hypophysectomie ne se traduisait dans les glandes génitales par aucun signe d'involution. Cependant deux femelles opérées un peu plus tôt (le 6 nov.) montraient des ovocytes au début de l'évolution atrétique (3 mois après l'opération).

La lenteur des processus atrétiques en hiver doit vraisemblablement être mise en relation avec l'hibernation des grenouilles, et le ralentissement corrélatif du métabolisme.

Un second lot d'opérés fut sacrifié en septembre après 10 mois. Aucun couple ne s'était formé en mars parmi les individus de ce lot. Gonades mâles et callosités avaient alors subi l'involution que nous avons décrite chez les mâles opérés au printemps (²).

Chez les femelles, les phénomènes sont un peu plus complexes. L'ovaire ne présente pas le nouveau lot d'ovocytes qui, ayant subi la vitellogénèse, aurait dû normalement fournir la ponte prochaine. Il est cependant assez volumineux car, la ponte n'ayant pas eu lieu au mois de mars précédent, tous les œufs qui étaient arrivés à maturité sexuelle se sont atrésiés *in situ*. De même l'oviducte, sans atteindre le volume de celui d'un animal témoin à cette époque, est encore très gros. Là encore deux phénomènes ont interféré : inhibition estivale due à l'hypophysectomie, seul phénomène en cause dans les opérations de printemps et involution portant sur un organe qui n'a pas évacué ses produits de secrétion. Cette involution est très lente, et, après 10 mois, elle est loin d'être terminée.

En somme, dans les hypophysectomies du printemps, l'inhibition du nouveau cycle sexuel est à peu près seule en cause, les produits génitaux mûrs ayant été évacués lors de la ponte (ceci est surtout manifeste pour l'ovaire et pour l'oviducte). Dans les hypophysectomies d'hiver, outre que les phénomènes atrétiques sont longs à commencer (hibernation), on constate que la résorption des éléments sexuels est une action qui s'ajoute et, dans une certaine mesure (oviducte), masque les phénomènes d'inhibition.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *La détermination quantitative de la vitamine antinévritique dans les milieux naturels. Technique nouvelle.* Note de MM. **Paul Meunier** et **Claude Blancpain**, présentée par M. Maurice Javillier.

Les méthodes de dosage de la vitamine B_1 sont fondées soit [Kinnersley et Peters (1) et divers auteurs] sur la production d'un dérivé azoïque coloré de l'aneurine, soit [Jansen et autres (2)] sur l'oxydation par le ferricyanure de ce corps en thiochrome, composé fluorescent. Dans tous les cas, le dérivé coloré ou fluorescent est, avant la mesure, extrait au moyen d'un solvant organique, ce qui constitue un obstacle au dosage de la cocarboxylase, ester pyrophosphorique de l'aneurine, dont les dérivés sont complètement insolubles dans un tel solvant. Une hydrolyse diastasique préalable devient nécessaire [Melnick et Field (3), Hennessy et Cerecedo (4)]. Outre la complication introduite, le défaut de ces méthodes est le manque de spécificité.

Nous donnons une solution précise et simple au problème du dosage de la *vitamine* B_1 par l'emploi conjugué des deux réactions précédentes.

Nous nous sommes assurés d'abord que la copulation du sel de diazonium et de la vitamine B_1 se fait par le carbone 2 du thiazol. De fait, le thiazol libre donne la réaction, alors que ses dérivés substitués en 2 ne la fournissent plus. (La pyrimidine et ses dérivés ne se colorent pas avec l'acide sulfanilique diazoté.)

Nous avons constaté ensuite que seule la réaction de diazotation de la vitamine B_1 est totalement inhibée par un traitement de quelques secondes de la vitamine par le ferricyanure à $pH > 9$, tandis que, dans les mêmes conditions, ne sont pas modifiées les réactions que donnent l'histidine, l'histamine, le thiazol libre, la tyrosine. La comparaison des formules de

(1) *Biol. Journ.*, 28, 1934, p. 667.
(2) *Rec. Trav. chim. Pays-Bas*, 55, 1936, p. 1046.
(3) *Proc. Soc. Exp. Biol. Med.*, 39, 1938, p. 317.
(4) *Journ. Am. Chem. Soc.*, 61, 1939, p. 179.

l'aneurine et du thiochrome explique ce comportement de la vitamine B_1.

```
                          CH³                                                        CH³
N=CH                      C       C—CH²—CH²OH              N=CH              C       C—CH²—CH²OH
 |                        (4)     (5)                       |                (4)     (5)
CH³—C   C——CH²——N (3)                          →  CH³—C   C—CH²—N (3)
N—C              OH       (2)     (1)                  ||   ||            (2)     (1)
      NH²                 C       S                    N—C                C       S
                          H                                  N
```

Nous avons alors abordé l'étude colorimétrique précise de la réaction de l'aneurine avec diverses amines diazotées à l'aide de l'électrophotomètre ([5]). Cette étude nous a conduits à diazoter l'amine choisie au moment même de l'addition de la vitamine B_1 et à reconnaître que la vitamine ne doit pas être portée à pH 9 en l'absence du diazoïque, car une fraction importante échapperait en quelques secondes à la copulation. Ces remarques conduisent à la technique suivante :

On verse dans la cuve d'observation 2 gouttes d'acide sulfanilique à 1 pour 100 dans HCl au dixième, puis 4^{cm^3} de la solution C de Kinnersley et Peters (soude demi-normale renfermant 2,9 pour 100 de bicarbonate de sodium), préalablement additionnée de 0,3 pour 100 de nitrite de sodium. Quelques secondes après, on verse 1^{cm^3} de solution à titrer de pH 5 à 6 (contenant 3 à 30γ de B_1 par centimètre cube). On fait une première lecture colorimétrique avec l'écran vert, exactement 30 secondes après ce dernier mélange. On refait de nouvelles lectures de 15 en 15 secondes, jusqu'à 1 minute 30. On répète alors l'expérience avec la solution à titrer additionnée de 0,1 pour 100 de ferricyanure de potassium.

Dans ces conditions, on observe un phénomène très net en ce qui concerne la cinétique de la réaction : la vitamine B_1 fournit rapidement, en moins de 30 secondes, son maximum de coloration, tandis que la couleur des autres dérivés azoïques (histidine, tyrosine) se développe beaucoup plus lentement. Sur un extrait complexe le tracé de la courbe cinétique fournit déjà une indication et l'emploi du ferricyanure permet la mesure. C'est ce qu'illustre le graphique ci-après : la différence entre les ordonnées des deux courbes à 30 secondes ou 1 minute mesure la quantité de vitamine.

Cette méthode appliquée aux levures nous a montré que, même sous la forme de cocarboxylase, l'aneurine n'échappe pas à nos déterminations, car l'hydrolyse par la takadiastase ([6]) ne modifie pas en général notre résultat,

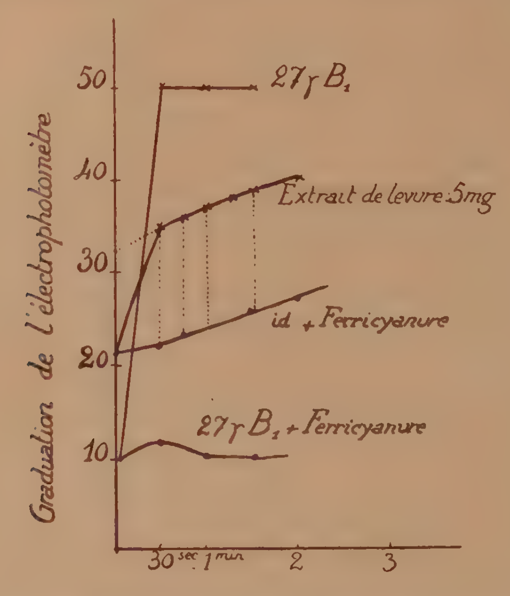
---

([5]) P. Meunier, *Bull. Soc. Ch. Biol.*, 19, 1937, p. 113.

([6]) Kinnersley et Peters, *Biochem. J.*, 32, 1938, p. 1516.

tandis que celui de la méthode au thiochrome (entraînement par l'isobutanol) est toujours considérablement augmenté après cette hydrolyse.

Enfin notre technique nous a permis de comparer aisément divers pro-



cédés d'extraction de l'aneurine de mélanges complexes, et de donner la préférence à l'acide acétique à 2 pour 100 (Hennessy et Cerecedo, *loc. cit.*).

La méthode donne donc d'emblée une valeur satisfaisante de la teneur en vitamine B_1 d'un produit naturel tel qu'une levure ou l'un de ses extraits.

IMMUNOLOGIE. — *Sur le rôle du cuivre dans l'atténuation du venin de vipère* (Vipera aspis) *par l'eau oxygénée*. Note de M. **Paul Boquet**, présentée par M. Louis Martin.

En recherchant si l'eau oxygénée est capable de diminuer ou même de supprimer la toxicité du venin de vipère (*Vipera aspis*), nous avons constaté les faits suivants :

Une solution de venin au 1/500e (1), dans de l'eau distillée ordinaire,

---

(1) Le venin utilisé dans toutes ces expériences tue régulièrement par voie veineuse, à la dose de $0^{mg},35$ par kilogramme d'animal, les lapins pesant de 2000 à 2500^g.

mélangée en parties égales (3^{cm^3}) à des solutions d'eau oxygénée préparées avec la même eau distillée ([2]), peut être rendue inoffensive pour le lapin (épreuve intraveineuse), après un séjour de 20 heures à 37°, ainsi qu'en témoignent les résultats ci-dessous.

Dilution de l'eau oxygénée.	Lapins éprouvés avec trois doses mortelles de venin.	avec cinq doses mortelles de venin.
1/100°	survit	survit
1/200°	survit	survit
		survit
		survit
1/500°	survit	survit
	survit	mort en 2 h.
1/1000°	survit	survit
	survit	survit
		mort en 10 h. env.
1/5000°	mort en 4 min.	mort en 2 min.

Les dilutions d'eau oxygénée seules se montrent inoffensives aux doses utilisées précédemment, et les lapins auxquels on injecte par voie veineuse trois ou cinq doses mortelles de la solution témoin de venin dans l'eau distillée ordinaire, conservée 20 heures à 37°, meurent en 2 à 5 minutes.

Au contraire, lorsque les dilutions sont faites dans de l'eau redistillée dans un appareil en verre pyrex, le mélange venin + eau oxygénée ne subit aucune atténuation dans les mêmes délais. Tous les lapins qui reçoivent par voie veineuse trois ou cinq doses mortelles de venin additionné de 1/5000° à 1/100° d'eau oxygénée meurent en 2 à 5 minutes comme les témoins.

Il apparaît donc que l'eau distillée ordinaire employée dans ces expériences contient une substance qui favorise l'action de l'eau oxygénée sur le venin.

La première distillation étant effectuée dans un appareil en cuivre, nous avons pensé que la substance étrangère éliminée par une nouvelle distillation dans des vases en pyrex pouvait être le métal même, entraîné avec l'eau dans l'opération préliminaire. Les expériences ci-après ont établi que cette hypothèse était fondée :

([2]) Eau oxygénée Rhône-Poulenc à 100 volumes, légèrement alcalinisée au préalable par NaOH (pH 7.5 à pH 7,8) et perhydrol Merck, également à 100 volumes, tel quel ou légèrement alcalinisé.

a. La recherche du cuivre, selon la technique de Thomas-Carpentier avec le réactif de Kastle-Meyer, a révélé la présence de traces de ce métal dans l'eau distillée ordinaire;

b. L'addition de quantités infinitésimales de cuivre, sous forme de sulfate (SO^4CU, $5H^2O$), a conféré à l'eau bidistillée des propriétés comparables à celles de l'eau distillée ordinaire.

Les huit lapins qui ont reçu par voie veineuse cinq doses mortelles de venin laissé en contact 20 heures à 37° avec des dilutions d'eau oxygénée allant de 1 pour 800 à 1 pour 100, en eau bidistillée + sulfate de cuivre (SO^4CU, $5H^2O$) à 10^{-6} de cuivre (1^{mg} par litre) ont survécu [3]. Au contraire, les neuf lapins auxquels on avait injecté, par la même voie, les mêmes quantités de venin diluées dans de l'eau bidistillée + eau oxygénée seule à 1 pour 100 et à 1 pour 200, ou dans de l'eau bidistillée + sulfate de cuivre sont morts en 2 à 5 minutes.

En premier lieu, tous ces faits montrent avec quelle prudence il convient d'opérer lorsqu'on étudie des substances qui agissent à très faible dose sur des produits aussi toxiques que les venins. Ils apportent également la preuve que l'eau oxygénée détruit rapidement la toxicité du venin de vipère lorsque l'oxygène actif est fixé sur ce produit par l'intermédiaire d'un métal, en l'espèce le cuivre, qui jouerait alors le rôle d'un catalyseur.

Les résultats ainsi obtenus permettent d'entrevoir que maintes réactions immunologiques observées *in vitro*, et très vraisemblablement *in vivo*, peuvent être liées à l'intervention d'infiniment petits chimiques.

BACTÉRIOLOGIE. — *La transmission de la maladie de Nicolas et Favre par instillation nasale chez la souris blanche*. Note de Mlle **Rachel Schoen**, présentée par M. Louis Martin.

Nous avons réussi à transmettre la lymphogranulomatose inguinale par voie intranasale, en déterminant, chez la souris blanche, une infection

(3) L'atténuation du venin à 37° par l'eau oxygénée + cuivre est très rapide. Après 1 heure 30, les solutions venimeuses contenant 1/100e ou 1/200e d'eau oxygénée et 10^{-6} de cuivre se montrent déjà dépourvues de toxicité pour le lapin (épreuve intraveineuse à la dose de 1^{mg} par kilogramme). En outre, elle ne semble pas altérer les qualités antigéniques du venin. Deux lapins qui avaient supporté sans dommage trois doses mortelles de venin traité par l'eau oxygénée + cuivre, ont reçu ultérieurement quatre injections de venin traité de la même façon, à raison d'une injection par semaine. Ils ont résisté, 15 jours après la dernière immunisation, à une injection intraveineuse de venin pur, mortelle pour le témoin.

généralisée transmissible en série et constamment accompagnée d'altérations pulmonaires caractéristiques [1].

Technique. — Des souris de 17 à 18^g sont anesthésiées à l'éther sulfurique pendant une minute. Immédiatement après, elles reçoivent, par instillation nasale, goutte à goutte et très lentement, 0$^{cm^3}$,1 d'une émulsion de virus à 1/10e, soit de provenance névraxique (souche Kam. de souris ou de singes), soit du virus lymphogranulomateux activé par passages dans les néoplasmes sarcomateux [2]. Les animaux ainsi infectés avec la première souche ne présentent pas de symptômes morbides apparents. Par contre, les souris inoculées avec le virus tumoral montrent, trois ou quatre jours après l'infection, des troubles respiratoires bien marqués; un certain nombre d'entre elles succombent au cours de la première semaine de la maladie.

Les altérations microscopiques du poumon sont caractérisées par une périvascularite intense, avec formation de véritables lymphômes, et des lésions inflammatoires et prolifératives interstitielles, parfois très étendues. En outre, on constate souvent une exsudation polynucléaire intra-alvéolaire, avec hypertrophies des cellules endothéliales et caryocinèses. Or ces lésions pulmonaires s'accompagnent, au début de l'infection, d'une apparition de granulo-corpuscules lymphogranulomateux enkystés au niveau de foyers inflammatoires, ou inclus dans les grosses cellules endothéliales (voir *fig.* 1). Avec la progression de la réaction infiltrative, on observe le même processus involutif des granulo-corpuscules, signalés par nous, dans l'infection lymphogranulomateuse du névraxe et celle des tumeurs mésodermiques. Ces altérations pulmonaires sont très accusées chez des souris examinées entre le troisième et le douzième jour de la maladie, et elles sont, généralement, plus prononcées chez des animaux inoculés avec la souche néoplasique.

Nous avons effectué, à plusieurs reprises, de nombreux passages pulmonaires en série, en provoquant, d'une façon constante, les mêmes symptômes morbides avec des lésions caractéristiques du poumon.

---

(1) La pneumonie lymphogranulomateuse du lapin et du cobaye, provoquée par inoculation du virus *directement* dans le poumon, a été décrite par Caminopetros et Photakis (*Bull. de la Soc. de Pathol. exotique*, 28, 1935, p. 81). Par la suite, Haam et Hartwell, reprenant l'étude histologique du problème, constatent que les altérations pulmonaires sont bien caractéristiques seulement chez le lapin, tandis que la réaction chez le cobaye, de même que chez la souris, n'est pas spécifique (*Journ. Trop. Med. and Hyg.*, 40, 1937, p. 214).

(2) R. Schoen, *Ann. de l'Institut Pasteur*, 60, 1938, p. 499.

La virulence lymphogranulomateuse du tissu pulmonaire a été chaque fois contrôlée, parallèlement, par des passages transcraniens aux souris et, d'autre part, par des inoculations sous-cutanées à des cobayes. Par ces deux méthodes, le virus a pu être régulièrement mis en évidence au cours



Souris 832, sacrifiée le 6e jour. Coupe de poumon.

1, lésions périvasculaires et foyer aigu interstitiel. Gross. 1/60. — 2, corpuscules lymphogranulomateux, enkystés dans les cellules endothéliales au niveau du foyer inflammatoire. Gross. 1/1000. Coloration orange-éosine-bleu de Unna.

du stade aigu de la maladie. L'infectiosité du poumon est très accusée. Ainsi, les dilutions du virus pulmonaire, provenant du cinquième et du septième passages, se sont montrées très virulentes au titre d'au moins à 1 : 500. Au début de l'infection on décèle également la présence du virus dans le sang et dans la rate, tandis que le névraxe se montre constamment stérile.

Conclusions. — Le virus de la maladie de Nicolas et Favre offre, chez la souris blanche, une affinité très accusée pour le tissu pulmonaire. Instillé par voie nasale, ce virus se localise dans le poumon et pullule *in situ*. L'infection intranasale provoque des lésions pulmonaires intenses, transmissibles en série, et accompagnées d'un développement caractéristique des granulo-corpuscules représentant le stade visible du virus lymphogranulomateux.

BACTÉRIOLOGIE. — *Sur la vaccination contre le rouget du porc.* Note de M. **André Staub**, présentée par M. Louis Martin.

Le procédé de vaccination de Pasteur et Thuillier par cultures atténuées nécessite deux interventions espacées d'une douzaine de jours et n'est applicable qu'aux porcs âgés de moins de quatre mois.

Nous nous sommes demandé si la méthode qui nous a permis à Ramon et à nous-même d'obtenir un vaccin anticharbonneux unique très efficace et applicable à tous les animaux domestiques même les plus sensibles [1] ne conduirait pas à des résultats semblables avec le Rouget.

Par l'exposition suffisamment prolongée à l'étuve d'une culture de bacille du Rouget au large contact de l'air, suivant la technique de Pasteur, nous avons obtenu une souche bien fixée, pratiquement avirulente, puisqu'à la dose de 1^{cm^3} une culture en bouillon de 24 heures laisse le pigeon indifférent et que 1/8 de centimètre cube provoque seulement un malaise passager à la souris.

(A titre de comparaison le premier vaccin pastorien, à la dose de 1/8 de centimètre cube, tue de 50 à 100 pour 100 des souris et pigeons.)

Cette culture utilisée seule procure déjà une immunité notable aux animaux de laboratoire. En lui adjoignant une substance adjuvante telle que la gélose au taux de 2 pour 1000, nous avons obtenu les résultats qui, à l'heure actuelle, se résument ainsi :

Des souris, des pigeons et des lapins ont reçu, les premières 1/8 de centimètre cube, les autres 1/4 de centimètre cube de vaccin.

De chaque lot, trois animaux ont été éprouvés quinze jours après, puis tous les trois mois.

Tous ces animaux ont bien supporté le vaccin et ont ensuite résisté à

---

(1) G. Ramon et A. Staub, *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 132.

l'épreuve virulente qui a tué tous les témoins en deux à quatre jours suivant l'espèce.

Le délai entre l'immunisation et l'épreuve est actuellement de un an pour la souris, 10 mois pour le lapin, 9 mois pour le pigeon.

Les expériences sur le porc, encore en cours, confirment jusqu'ici ces résultats.

Notre souche de bacille du Rouget a donc bien conservé, malgré l'atténuation très poussée de sa virulence, un pouvoir antigénique marqué que l'adjonction de gélose à la culture, en favorisant la multiplication du microbe *in situ*, permet de développer suffisamment pour obtenir une forte et durable immunité.

La séance est levée à 16h.

E. P.

ERRATA.

(Séance du 30 janvier 1939.)

Note de M. *Paul Lévy*, Sur un problème de M. Marcinkiewicz :

Page 319, n° 3, lignes 2 et 4, *au lieu de* $\sin^2\Phi_p$, *lire* $\frac{2}{\pi}\Phi_p$; ligne 7, *au lieu de* $\sin^2\Phi$, *lire* $\frac{2}{\pi}\Phi$.

En outre, remplacer les formules (3) à (5) par

$$(3)\qquad \frac{d}{dv}\Pr\{V < v\} = g_1(v) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-v}{v}} \qquad (0 < v < 1),$$

$$(4)\qquad \mathfrak{M}\{V^\alpha\} = \frac{1}{\alpha+1}\mathfrak{M}\{\sin^{2\alpha}\Theta\} \qquad \left(\alpha + \frac{1}{2} > 0\right),$$

$$(5)\qquad f(v) = \frac{1}{2}[g_1(v) + g_1(1-v)] = \frac{1}{\pi\sqrt{v(1-v)}} \qquad (0 < v < 1).$$

Page 320, ligne 4, remplacer la formule par

$$F(0, x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x}, \qquad G(0, 0, T, x) = x \qquad (0 < x < 1).$$